

PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITE DE NANCY
COLLECTION DES THESES DE LA FACULTE DES SCIENCES
SCIENCES PHYSIQUES

PREMIERE THESE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT
DE COUETTE PAR LA METHODE POLAROGRAPHIQUE

DEUXIEME THESE

RECENTES DECOUVERTES EN ASTROPHYSIQUE
A L'AIDE DES RAYONS INFRAROUGES

présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy
pour obtenir le grade de Docteur - ès - Sciences Physiques
par

Gérard COGNET

1968

Soutenues le 14 Septembre devant la Commission d'Examen

JURY

Messieurs : **HADNI**

Président

EPELBOIN

GOSSE

} Examinateurs

1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555002_0006

LOUDART & CLÉMENT

RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11

Tél. 52.80.09 -:- NANCY

PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITE DE NANCY
COLLECTION DES THESES DE LA FACULTE DES SCIENCES
SCIENCES PHYSIQUES

PREMIERE THESE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT
DE COUETTE PAR LA METHODE POLAROGRAPHIQUE

DEUXIEME THESE

RECENTES DECOUVERTES EN ASTROPHYSIQUE
A L'AIDE DES RAYONS INFRAROUGES

présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy
pour obtenir le grade de Docteur - ès - Sciences Physiques
par

Gérard **COGNET**

Soutenues le 14 Septembre devant la Commission d'Examen

JURY

Messieurs : **HADNI**

Président

EPELBOIN

GOSSE

} Examineurs

1968

ANNEE SCOLAIRE 1967 - 1968

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULT

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET

Professeurs

MM. DELSARTE	Analyse Supérieure	CHAPON	Chimie biologique
ROUBAULT	Géologie	HEROLD	Chimie miné. indus.
CAPELLE	Mécanique rationnelle	SCHWARTZ B.	Exploitation minière
VEILLET	Biologie animale	*MALAPRADE	Chimie
BARRIOL	Chimie théorique	MANGENDT	Botanique
BIZETTE	Physique	GAYET	Physiologie
GUILLIEN	Electronique	HADNI	Physique
GIBERT	Chimie Physique	*BASTICK	Chimie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	DUCHAUFOR	Pédologie
BOLFA	Minéralogie	GARNIER	Agronomie
NICLAUSE	Chimie	NEEL	Chimie org. indus.
FAIVRE	Physique appliquée	BERNARD	Géologie appliquée
AUBRY	Chimie minérale	*CHAMPIER	Physique
COPPENS	Radiogéologie	*GAY	Chimie biologique
DUVAL	Chimie	STEPHAN	Zoologie
FRUHLING	Physique	*CONDE	Zoologie
HILLY	Géologie	*WERNER	Botanique
LE GOFF	Génie chimique	EYMAR	Calcul dif. & int.
SUHNER	Physique expérimentale	LEVISALLES	Chimie organique

Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
MM FELDEN	Physique
*GOSSE	Mécanique physique
*DAVOINE	Physique (E.N.S.M.I.M.)
HORN	Physique 1er cycle
*ROCCI	Géologie
Mme LUMER	Mathématiques
N.....	Chimie biologique
N.....	Mécanique appliquée

* Professeur titulaire à titre personnel

Maîtres de conférences

Mme BASTICK	Chimie P.C. Epinal
MM GUDEFIN	Physique
VUILLAUME	Psychophysiologie
FRENTZ	Biologie animale
MARI	Chimie (I.S.I.N.)
AUROUZE	Géologie
DEVIOT	Physique du solide
FLECHON	Physique P.C.
Mle HUET	Mathématiques C.B.G.
VIGNES	Métallurgie
BALESDEMENT	Thermodynamique chimique appliquée (ENSIC)
BLAZY	Minéralogie appliquée (ENSG)
JANOT	Physique P.C. Epinal
JACQUIN	Pédologie et chimie agricoles
MAINARD	Physique P.C.
CACHAN	Entomologie appliquée (ENSA)
MARTIN	Chimie P.C.
PAULMIER	Mécanique expérimentale
PROTAS	Minéralogie
JOZEFOWICZ	Physico-chimie
JURAIN	Géologie C.B.G.
RIVAIL	Génie chimique
VILLERMAUX	Génie chimique
METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)
PAIR	Mathématiques appliquées
BAUMANN	Physique 1er cycle
DURAND	Physique
GRANGE	Physique (ISIN)
N.....	Mécanique des fluides (ISIN)
N.....	Mécanique (ISIN)
N.....	Probabilité et statistiques
N.....	Mathématiques
N.....	Mathématiques P.C.
N.....	Mathématiques C.B.G.
N.....	Physiologie animale
N.....	Mathématiques M.P.
N.....	Exploitation minière (ENSMIM).

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur le Professeur J. GOSSE, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique.

Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance pour la bienveillante attention et le soutien constant qu'il n'a cessé de nous accorder.

Nous remercions très sincèrement notre parrain au C. N. R. S., Monsieur I. EPELBOIN, Directeur de Recherche à la Faculté des Sciences de Paris, pour son appui précieux pendant toute la durée de nos travaux.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur HADNI, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, pour l'amabilité avec laquelle il a accepté la présidence de notre Jury et le choix qu'il a bien voulu faire de notre second sujet de thèse.

Nos remerciements vont enfin à tous nos camarades, chercheurs et techniciens du Laboratoire, tout particulièrement à Monsieur CHERRIER, pour leur sympathique et efficace collaboration.

I N T R O D U C T I O N

L'étude du phénomène de turbulence présente un intérêt évident tant sur le plan fondamental, pour une meilleure connaissance des fluides en mouvement, que sur le plan pratique puisqu'une très grande partie des opérations industrielles sur les fluides s'effectue en régime turbulent. De nombreuses recherches ont porté sur la détermination des lois de transfert de la quantité de mouvement, de la chaleur et de la matière, notablement différentes de celles observées en régime laminaire, au sein de l'écoulement comme au niveau des surfaces qui le limitent. Dans ces travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux, on relève deux orientations majeures :

- Certains auteurs s'attachent à prévoir dans quelles conditions un écoulement laminaire donné peut devenir instable en établissant un critère de stabilité à partir des différentes forces qui déterminent le mouvement.

- d'autres étudient la turbulence entièrement développée et ses caractéristiques en fonction des conditions d'écoulement.

Bien que dans le premier cas les théories ne donnent le plus souvent qu'un ordre de grandeur des résultats observés expérimentalement, on peut admettre que les deux aspects du problème sont actuellement relativement bien connus. Par contre en ce qui concerne le mécanisme intime du phénomène de turbulence, on est obligé de constater que la question est encore loin d'être résolue. En particulier la naissance de la turbulence à partir des premières instabilités, puis son évolution jusqu'à un complet développement sont encore très mal comprises. C'est pourquoi l'étude du régime intermédiaire d'écoulement (appelé également "régime secondaire" ou "régime transitoire") présente un grand intérêt ; non seulement elle permet d'assurer la liaison entre les deux domaines d'exploration cités plus haut, mais également elle trouve son application dans plusieurs phénomènes géophysiques et météorologiques [1, 2] ainsi que dans de nombreux problèmes modernes comme l'aéronautique, l'énergie atomique et le génie chimique [3, 4].

En raison de la complexité d'une telle étude il convient de considérer des types d'écoulement possédant un grand degré de symétrie. L'expérience montre que ce n'est pas toujours possible, car dans plusieurs cas simples le domaine de transition entre le régime laminaire stable et le régime turbulent complètement établi est trop restreint pour que l'on puisse observer commodément le régime secondaire ; on peut citer à titre d'exemple l'écoulement dans un tube circulaire ou sur une plaque plane. A l'inverse l'écoulement de COUETTE entre deux cylindres coaxiaux a l'intérêt de posséder un large domaine de régime transitoire tout en étant relativement simple. Il est, en outre, l'un des rares cas où l'expérience confirme parfaitement les prévisions théoriques concernant l'apparition du premier type d'instabilité, comme l'a montré G.I. TAYLOR [5], qui a fait le premier une étude remarquable sur ce sujet. Plusieurs auteurs ont cherché par la suite à compléter l'analyse de TAYLOR en étudiant les stades ultérieurs du mouvement. La part expérimentale de ces recherches repose essentiellement sur deux méthodes :

- l'une consiste à visualiser l'écoulement pour observer les différents modes d'instabilités qui peuvent se manifester [5], et la manière dont le mouvement évolue vers le régime turbulent. Le récent travail de D. COLES [6] montre la richesse, mais aussi les limites d'une telle méthode.

- l'autre permet de déterminer le coefficient moyen de frottement au niveau de la surface d'un des cylindres à partir de la mesure du couple résistant s'exerçant sur lui.

Dans les deux cas, on n'obtient que des informations qualitatives ou moyennes sur l'écoulement alors que l'intérêt d'une étude locale apparaît évident pour une meilleure compréhension de ce type de mouvement. C'est pourquoi nous avons mis au point et adapté au montage de COUETTE la méthode électrochimique connue sous le nom de Polarographie. La microélectrode utilisée est située en paroi d'un des cylindres ; Le flux de matière à son niveau est fonction du champ des vitesses au voisinage immédiat de sa surface. Cette méthode, relativement simple d'emploi, s'est révélée très riche dans tous les domaines de vitesse considérés dans notre étude , en particulier pour suivre la "dégradation" du mouvement depuis les premières instabilités laminares jusqu'au régime turbulent complètement établi.

Le premier chapitre de ce mémoire analyse les travaux antérieurs consacrés au régime transitoire de l'écoulement de COUETTE. L'accent est mis particulièrement sur les contributions de TAYLOR et de MARTIN qui sont à l'origine des principaux progrès enregistrés dans cette étude.

Au chapitre II, nous justifions du point de vue théorique l'utilisation de la polarographie comme méthode d'investigation locale des écoulements liquides. Sa mise en oeuvre au plan expérimental est décrite au chapitre III. Les résultats obtenus en régime laminaire stable pour lequel le profil de vitesse entre les deux cylindres est connu, sont présentés au chapitre IV. Ils permettent de s'assurer du bon fonctionnement des sondes de mesure et de vérifier la validité des lois établies.

L'étude de l'écoulement en régime transitoire est rapportée au chapitre V. Nous montrons que la méthode polarographique est particulièrement adaptée pour détecter l'apparition des divers types d'instabilité et suivre leur développement. Les résultats obtenus sont analysés à la lumière des travaux antérieurs, tant théoriques qu'expérimentaux.

CHAPITRE I

LE REGIME TRANSITOIRE DANS L'ECOULEMENT DE COUETTE

ANALYSE ET DISCUSSION DES TRAVAUX ANTERIEURS

I.1 - Généralités sur l'apparition et le développement des instabilités.

Toutes les expériences faites à ce sujet indiquent qu'un écoulement peut présenter un caractère permanent lorsque le mouvement est très lent. Par contre si la vitesse du fluide dépasse une certaine limite critique, l'écoulement permanent laisse place à un écoulement à caractère tourbillonnaire dont la complexité croît avec la vitesse (Reynolds, Couette).

Cette limite est déterminée par l'importance relative des différentes forces auxquelles sont soumises les particules de fluide. Ces forces sont de deux types :

- les forces de surface comme la pression et les tensions visqueuses ; leur intervention dans le mouvement est bien définie.

- les forces de volume sur lesquelles beaucoup moins d'études ont été réalisées. L'intérêt qu'on leur porte depuis quelques années provient du fait qu'elles permettent selon la manière dont elles interviennent soit de promouvoir les instabilités soit au contraire de stabiliser le régime permanent; parmi celles-ci on peut citer :

- 1- les forces de pesanteur à l'origine des instabilités thermiques par convection libre.

- 2- les forces centrifuges existant dès que l'écoulement présente une courbure.

- 3- les forces électriques et magnétiques dans le cas de fluides ionisés.

La théorie sur l'écoulement des fluides a pour objectif d'une part de comprendre comment naît l'instabilité à partir du régime laminaire permanent en définissant un critère de son apparition, et d'autre part d'éclairer par quelle évolution du mouvement cette instabilité se transforme en turbulence.

Dans tout ce qui suit la stabilité d'un écoulement est définie par rapport à une perturbation préexistante dans le fluide ou bien introduite volontairement. Si le mouvement tend à revenir à son état initial, il est dit "stable" vis à vis de la perturbation envisagée, dans le cas contraire il est dit "instable" et il y a apparition d'un nouveau type d'écoulement.

Le traitement mathématique d'un tel problème se heurte à deux difficultés ; il faut d'une part prévoir la forme et, d'autre part faire une hypothèse sur l'amplitude de la perturbation. Pour la première, l'expérience aide dans bien des cas le théoricien, par contre la seconde est à l'origine de deux hypothèses différentes :

- une théorie linéaire dans laquelle la perturbation de très petite amplitude n'a pas d'influence sur le mouvement moyen

- une théorie non linéaire où l'on considère les interactions entre le mouvement moyen et la perturbation d'amplitude finie.

La théorie linéaire dont une synthèse est présentée par LIN [7] constitue la première tentative pour résoudre le problème des instabilités. Elle consiste à superposer à la solution du régime permanent une perturbation convenable, de faible amplitude, présentant une périodicité dans une ou plusieurs directions et contenant un facteur de croissance fonction exponentielle du temps e^{kt} . La résolution des équations du mouvement s'effectue en négligeant les termes quadratiques d'où l'expression de "Théorie Linéaire". Ces équations sont complétées par des conditions aux limites pour lesquelles

les composantes de la perturbation doivent s'annuler. On est alors ramené à résoudre un problème de valeurs propres pour déterminer k en fonction de la (ou les) longueur d'onde de la perturbation et du paramètre caractéristique de l'écoulement (le nombre de Reynolds* ou un autre nombre adimensionnel adapté au mouvement). Si k a une partie réelle positive, la perturbation s'amortit et l'écoulement est stable. La limite $R(k) = 0$ correspond à la stabilité "marginale" ou neutre.

Les résultats obtenus par cette méthode sont souvent du même ordre de grandeur que ceux observés expérimentalement ; ils peuvent même être très proches quand il s'agit de l'écoulement sur une paroi concave (GOERTLER [8]) entre deux cylindres coaxiaux (TAYLOR [5]) ou, dans le cas de la convection libre d'un fluide situé sur une plaque chauffante (PELLEW - SOUTHWELL [9]). Par contre dans certains cas (écoulement de POISEUILLE dans un tube circulaire, écoulement de COUETTE entre deux plans parallèles dont l'un est mobile) la théorie prévoit que l'écoulement est toujours stable alors que l'on constate l'existence d'une transition. Cette anomalie peut s'expliquer par le fait que de tels écoulements sont instables uniquement vis-à-vis de perturbations ayant une amplitude finie. Les dimensions et la forme de la perturbation peuvent également ne pas être adaptées au problème considéré. Enfin dans le cas du développement d'une couche limite sur plaque plane, il se peut que l'instabilité naisse pour une valeur du nombre de Reynolds voisine de celle prévue par la théorie linéaire mais ne soit visible qu'en aval, après amplification, pour une valeur nettement supérieure.

Les limites de cette théorie sont contenues dans ses hypothèses mêmes :

- les termes d'ordres supérieurs de la perturbation sont ignorés, d'autre part l'amplitude de celle-ci n'est pas connue ; en

* Le nombre de Reynolds est un nombre adimensionnel représentant le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité : $Re = \frac{V \cdot d}{\nu}$ où V est la vitesse, d une longueur caractéristique de l'écoulement, ν la viscosité cinématique du liquide mouvement.

effet, le problème étant homogène sa solution n'est définie qu'à une constante près.

- la modification apportée dans le frottement à cause des forces de Reynolds (les termes quadratiques des équations du mouvement) n'est pas prise en considération.

- de toutes les longueurs d'onde possibles lorsque la partie réelle de k est positif on ne peut prévoir celle qui est observée expérimentalement.

Ainsi la théorie linéaire permet de prévoir dans une certaine mesure l'apparition du premier type d'instabilité mais ne donne aucune indication sur les stades ultérieurs du mouvement.

La théorie non linéaire, beaucoup plus récente, est la suite logique de la précédente. Supposons un écoulement à nombre de Reynolds constant, affecté par une petite perturbation ; au début celle-ci va croître exponentiellement avec le temps selon la théorie linéaire puis atteindre une taille telle que la quantité de mouvement transportée par cette perturbation devient appréciable. Les contraintes nouvelles associées à ce mouvement (forces de Reynolds) ne sont dès lors plus négligeables. Ces forces provoquent la distorsion de l'écoulement moyen ce qui a pour résultat de modifier le transfert d'énergie de l'écoulement moyen à la perturbation ; puisque ce transfert est la cause de la croissance de la perturbation, il y a une modification de la loi de croissance de celle-ci. STUART [10] [11] [12] a été le premier à mettre en évidence de manière claire cette interaction. L'écoulement peut encore être séparé en une partie moyenne et une perturbation de valeur moyenne nulle mais dans ce cas les deux parties sont dépendantes par l'intermédiaire des forces de Reynolds. Ainsi l'écoulement moyen n'est plus l'écoulement laminaire original, il en diffère d'autant plus que l'amplitude de la perturbation est grande.

Il est naturel de se demander s'il peut s'établir un équilibre où le transfert d'énergie compense exactement la dissipation visqueuse de la perturbation. Dans un tel état la perturbation doit posséder une amplitude définie et constante dans le temps, et la distorsion de l'écoulement moyen par rapport à l'écoulement initial demeure elle aussi constante. Le bilan d'énergie de la perturbation permet de déterminer son amplitude "d'équilibre". En appliquant cette théorie aux cas déjà traités avec l'hypothèse de linéarité on voit qu'elle constitue une meilleure approche des phénomènes ; comme exemple on peut citer l'écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles, pour lequel la théorie non linéaire considérant des perturbations d'amplitude finie (MEKSYN et STUART [13]), prévoit des nombres de Reynolds critiques plus proches de la valeur réelle que celui obtenu à partir de la théorie linéaire. Elle a également l'avantage sur cette dernière de donner une idée du mouvement après l'apparition des instabilités. Elle n'implique pas cependant, que le nouvel équilibre obtenu puisse subsister sous cette forme pour tous les nombres de Reynolds supérieurs au nombre de Reynolds critique. On peut toutefois imaginer qu'il se maintient dans un certain domaine et qu'il devient ensuite instable puisque la turbulence apparaît.

LANDAU [14] [15] a fait à ce sujet d'intéressantes suggestions; il dit que la première instabilité peut subsister dans un certain domaine de nombre de Reynolds puis devenir instable à son tour et laisser place à un second type d'instabilité, lequel peut aussi recouvrir un certain domaine dans le cas où un nouvel équilibre s'instaure. Si on continue d'augmenter le nombre de Reynolds plusieurs modes supplémentaires peuvent apparaître jusqu'à ce que, pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, l'écoulement soit perturbé au point d'être considéré comme turbulent. Si la transition est lente on doit pouvoir observer les états successifs du mouvement.

Il est évident que la prévision théorique de la suite des processus décrits par LANDAU devient vite inextricable aussi est-il fait largement appel à l'expérience ne serait-ce que pour connaître la forme des différentes instabilités observées réellement.

L'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux appartient au cas de transition lente. Il a l'intérêt de se prêter facilement à l'expérimentation et l'étude théorique de son régime transitoire tout au moins les premiers stades, n'est pas d'une trop grande complexité ; c'est pourquoi de nombreux auteurs s'y sont intéressés ; nous allons analyser plus en détail leurs travaux.

I.2. - Stabilité de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux ; l'instabilité symétrique :

I.2.1 - Les premiers travaux

L'écoulement entre deux cylindres a été utilisé pour vérifier l'existence d'une propriété caractéristique de chaque fluide : sa viscosité, et déterminer la valeur de celle-ci. A condition de ne pas dépasser certaines limites de vitesse les résultats obtenus sont compatibles avec les solutions laminaires du mouvement. COUETTE [16] a été le premier à faire l'étude très soignée de ce problème ce qui explique le nom donné à l'écoulement ; ses travaux complétés par ceux de MALLOCK [17, 18] montrent que la limite est beaucoup plus élevée lorsque le cylindre intérieur est fixe et le cylindre extérieur en rotation que dans le cas inverse.

La courbure de la surface mobile (concave ou convexe) est à l'origine des différences observées. Le premier essai d'explication de ce phénomène revient à LORD RAYLEIGH [19] qui établit un critère de stabilité pour les fluides non visqueux ; sa démonstration peut être présentée de la manière suivante :

On considère une portion courbe d'un écoulement ; un élément de fluide possède une vitesse tangentielle V_0 à la distance r_0 du centre de courbure O . En écoulement non perturbé d'un fluide non visqueux le gradient radial de pression équilibre exactement la force centrifuge $(\frac{\partial p}{\partial r})_{r_0} = \rho \frac{V_0^2}{r_0}$. On suppose la particule soumise à une force perturbatrice dont la ligne d'action passe par O . Elle est déplacée de r_0 à r mais conserve le même moment de quantité de mouvement par rapport à O , par consé-

quent : $V_r' = V_0 \cdot r_0$ où V' représente sa nouvelle vitesse. La force centrifuge qui s'exerce sur elle est alors $e \frac{V^2}{r} = e \frac{V_0^2 r_0^2}{r^3}$. Si l'on suppose

que dans l'écoulement V_r décroît lorsque r croît : $V < \frac{V_0 r_0}{r}$ pour $r > r_0$
 V étant la vitesse en r . Par suite $\frac{V_0^2 r_0^2}{r^2} > V^2$ et $(\frac{dp}{dr})_r = e \frac{V^2}{r} < e \frac{V^2}{r}$

ainsi la force centrifuge de l'élément de fluide est plus grande que le gradient de pression centripète. La particule a tendance à s'éloigner encore plus de sa position initiale : le mouvement est instable. Au contraire si V_r augmente avec r le gradient de pression a tendance à ramener les éléments de fluide dans leur situation initiale : le mouvement est stable. L'écoulement pour lequel V_r reste constant est dans un état de stabilité "marginale". Dans l'écoulement de Couette lorsque le cylindre intérieur est seul en rotation V_r ne peut que décroître vers l'extérieur ; le mouvement du fluide sans viscosité est intrinsèquement instable. Dans le cas inverse il est toujours stable ; et d'une manière générale le critère de RAYLEIGH pour la stabilité d'un tel écoulement s'écrit : $\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$ où Ω_1 et Ω_2 sont les vitesses et R_1 et R_2 les rayons des cylindres respectivement intérieur et extérieur.

I.2.2 - L'étude de TAYLOR et la théorie linéaire :

I.2.2.1. Description de l'instabilité symétrique

G.I. TAYLOR a repris les travaux de LORD RAYLEIGH en considérant un fluide visqueux. En 1923 il publie une étude tout à fait remarquable [5] dans laquelle il décrit la forme des instabilités et le régime de rotation des cylindres pour lequel elles apparaissent :

- l'écoulement secondaire consiste en une structure de tourbillons (vortex ou cellule) toriques régulièrement superposés selon la direction des génératrices des cylindres et dont les axes se confondent avec l'axe vertical de symétrie du système. La rotation de deux tourbillons voisins dans une section droite se fait en sens contraire comme l'indique la figure I-1a.

En première approximation on peut dire que l'instabilité se situe dans le domaine prévu par la théorie "non visqueuse" ; dans le cas où les cylindres tournent dans le même sens il faut appliquer le critère à tout le fluide, par contre dans le cas où ils tournent en sens

INSTABILITE de TAYLOR

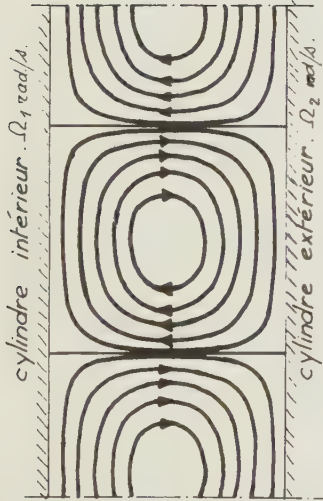


Figure 1.1a. Cylindres tournant dans le même sens.

$$1 > \Omega_1 / \Omega_2 > 0$$

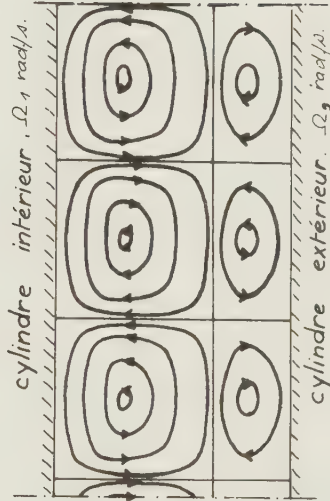


Figure 1.1b. Cylindres tournant en sens inverse.

$$\Omega_1 / \Omega_2 < 0.$$

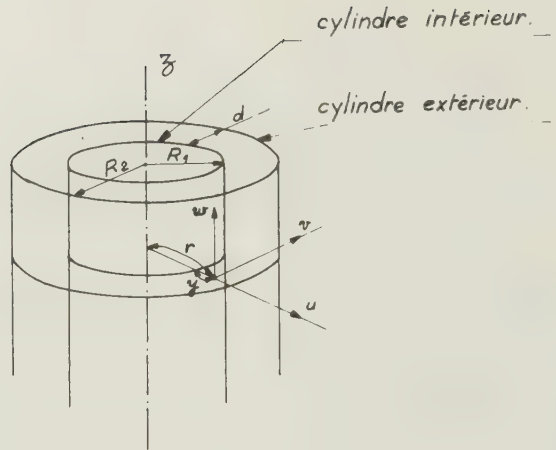


Figure 1.2. Système de coordonnées.

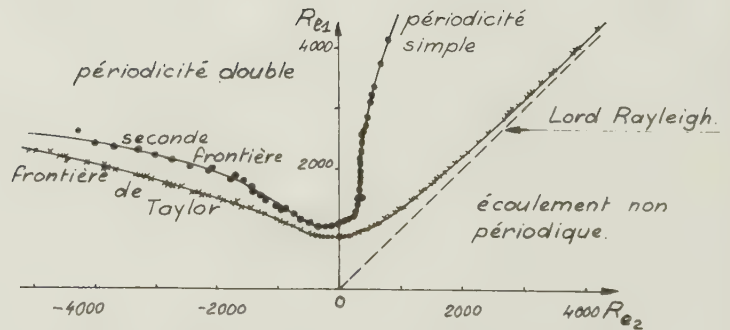


Figure 1.3. Différents régimes d'écoulement d'après Coles.

$$Re_1 = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}, \quad Re_2 = \frac{\Omega_2 R_2^2}{\nu} \quad \left(R_2 / R_1 = 1,135 \right)$$

inverse il convient de l'utiliser uniquement dans la région comprise entre le cylindre intérieur et la surface où la vitesse tangentielle s'annule (figure I.1 b).

D. COLES [6] propose le raisonnement suivant pour expliquer l'apparition de ce type d'instabilité : " Si on suppose que la vitesse tangentielle tourne localement autour d'un axe différent de l'axe de symétrie, le gradient radial de pression et l'accélération centripète provenant de la courbure de l'écoulement principal ne sont plus uniformes et exercent (selon une tangente) un couple qui conduit l'axe de la vorticité locale à une précession (analogue à une précession gyroscopique) dans la direction tangentielle. Cette précession crée des vitesses radiales dans un plan méridien qui sont elles-mêmes couplées à des accélérations tangentielles de Coriolis qui maintiennent la non-uniformité de la vitesse tangentielle".

Cette description confirme que l'instabilité ne peut naitre sans une perturbation initiale ; elle met en évidence le rôle de la courbure de l'écoulement ainsi que celui des forces visqueuses qui ont tendance à retarder l'apparition d'un tel processus.

I.2.2.2. Résolution du problème linéaire :

Les équations du mouvement en coordonnées cylindriques, compte tenu de la symétrie de révolution de l'écoulement entre deux cylindres s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U \partial U}{\partial r} - \frac{V^2}{r} + \frac{W \partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{U \partial V}{\partial r} + \frac{UV}{r} + \frac{W \partial V}{\partial z} &= \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{U \partial W}{\partial r} + \frac{W \partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W \end{aligned} \right\} \quad (I,1)$$

et l'équation de continuité : $\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ (I.2) où U, V, W sont

les composantes de la vitesse respectivement selon les directions :
radiale (r) azimutale (θ) et axiale (z) (figure I - 2). P est la pression,
v la viscosité cinématique du fluide et Δ_1 représente $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$. En

régime laminaire permanent sans mouvement secondaire $U = W = 0$ et le système (I,1) se réduit à :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{V^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ (\Delta_1 - \frac{1}{r^2}) V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

dont la solution est :

$V = Ar + B/r$ (I.4) avec A et B déterminés par les conditions aux limites :

$V = R_1 \Omega_1$ pour $r = R_1$, $V = R_2 \Omega_2$ pour $r = R_2$; ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} A &= \Omega_1 \frac{(1 - R_2^2 m / R_1^2)}{1 - R_1^2 / R_2^2} \\ B &= \Omega_1 \frac{R_1^2 (1 - m)}{1 - R_1^2 / R_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (I,5) \quad \text{Avec } m = \Omega_2 / \Omega_1$$

On suppose que le régime perturbé se compose du mouvement défini par (I,4) et (I,5) et d'une perturbation symétrique dont les composantes de vitesses u, v, w sont petites devant V et ne dépendent que de r, z, et t. En négligeant les termes contenant des produits ou des carrés de u, v, w (théorie linéaire) les équations du mouvement (I,1) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{V^2}{r} &= - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{A+B}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) v + \nu \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \right) u \\ 0 &= - \frac{\partial v}{\partial t} - 2 A u + \nu \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \right) v \end{aligned} \right\} \quad (I,6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial t} + \nu \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \end{aligned} \right\} (1,6)$$

et l'équation de continuité : $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1,7)$

Les conditions aux limites doivent traduire que la perturbation s'annule aux parois des cylindres c'est à dire :

$$u = v = w = 0 \text{ pour } r = R_1 \text{ et } r = R_2$$

TAYLOR a le premier suggéré une solution de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \cos \lambda z e^{kt} \\ v &= v_1 \cos \lambda z e^{kt} \\ w &= w_1 \sin \lambda z e^{kt} \end{aligned} \right\} (1,8)$$

où u_1, v_1, w_1 sont des fonctions de r seulement. En éliminant p entre la 1ère et la 3ème équation de (1.6) le système se réduit à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{r} + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda w_1 &= 0 \\ \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 - \frac{k}{\nu} \right) v_1 &= 2 A u_1 \\ \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta_1 - \lambda^2 - k/\nu \right) w_1 &= -2 \left(A + \frac{B}{r^2} \right) v_1 - \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 - \frac{k}{\nu} \right) u_1 \end{aligned} \right\} (1,9)$$

complété par les conditions aux limites : $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$ (1.10). Pour résoudre (1.9) TAYLOR suppose que les vitesses sont développables selon une base orthogonale de fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1. Les conditions (1.10) se traduisent alors par un système de relations linéaires et homogènes entre les coefficients de ces séries. L'existence d'une solution non nulle impose une équation caractéristique de la forme : $F(k, \lambda, Re, R_2/R_1, \Omega_2/\Omega_1) = 0$ où R_2 représente le nombre de Reynolds de l'écoulement défini par $Re = R_1 \Omega_1 \frac{(R_2 - R_1)}{\nu}$.

Ainsi pour Re , Ω_2 / Ω_1 , R_2 / R_1 fixés on peut déterminer le coefficient d'amplification k pour chaque nombre d'onde λ . MEKSYN [20] a montré que k ne pouvait être imaginaire. Pour un fluide et une géométrie déterminés et pour Ω_2 fixé, l'écoulement devient instable vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde λ lorsque Ω_1 atteint une valeur critique Ω_c pour laquelle $k = 0$ (stabilité marginale). Le minimum de la courbe $\Omega_c(\lambda)$ détermine à la fois la vitesse de rotation Ω_1 à laquelle apparaît l'instabilité et la longueur d'onde de celle-ci. La résolution formelle de ce problème est déjà fort complexe. TAYLOR l'a menée dans le cas simplifié où l'espace annulaire $d = R_2 - R_1$ est petit devant les rayons des cylindres ; il définit un paramètre $P = \frac{\pi^4 \nu^2 (R_1 + R_2)}{2 \Omega_1^2 d^3 R_1^2 (1 - m R_2^2 / R_1^2) (1 - m)}$

dont la valeur critique détermine la vitesse au delà de laquelle l'écoulement est instable. Pour $0 \leq m < 1$ cette valeur est donnée par :

$$P_c = 0.0571 \left(\frac{1+m}{1-m} - 0.652 \frac{d}{R_1} \right) + 0.00056 \left(\frac{1+m}{1-m} - 0.652 \frac{d}{R_1} \right)^{-1}$$

qui se réduit à $P_c = 0.0571 \left(\frac{1+m}{1-m} \right)$ puisque $\frac{d}{R_1} \ll 1$. Il correspond $\lambda = \frac{\pi}{d}$

c'est à dire que la longueur d'onde $\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$ de la perturbation à son

apparition est le double de l'espace annulaire. On peut en déduire ensuite les composantes de vitesse de la perturbation et tracer les lignes de courant (figure 1.1a).

Lorsque m est négatif (cylindres tournant en sens contraire) TAYLOR a traité le seul cas $m = 1,347$ et montré que le fluide se divise alors en deux régions séparées par une surface cylindrique de vitesse nulle qui correspond à celle existant en régime permanent, la circulation des vortex intérieurs étant beaucoup plus intense que celle des vortex extérieurs (figure I.1a).

Dans une partie expérimentale il a vérifié tous ces résultats à quelques % près, d'autant mieux que d/R_1 était petit devant l'unité. Sa méthode consistait à visualiser l'écoulement au moment de l'apparition des vortex par injection de couleur juste avant la vitesse critique.

Après TAYLOR de nombreuses études ont été consacrées à la théorie linéaire ne différant entre elles que par la méthode de résolution de (I,9) et (I,10). Citons celle de MEKSYN [20] [21] qui consiste à développer les

vitesse en séries asymptotiques des puissances inverses d'un "grand" paramètre (π/d en unité de $1/R_1$). Le critère qu'il établit pour $0 < m < 1$ et d/R_1 petit reste valable jusqu'à $d/R_1 = 1$. Ce critère appelé depuis nombre de TAYLOR * est défini par :

$$T_M = \frac{2 \Omega_1^2 d^3 R_1^2 (1 - m R_2^2 / R_1^2) [(1 + m) - 3 d / 4 R_0 (1 - m)]}{v^2 (R_1 + R_2)}$$

dont la valeur critique $T_{Mc} = 1712$. Dans le cas où $m < 0$ il obtient :

$$T'_M = \frac{2 \Omega_1^2 (1 - m R_2^2 / R_1^2)^2 (d')^5}{v^2 (R_2^2 / R_1^2 - 1)^2 R_1} \quad T'_{Mc} = 283, \quad \lambda d' = \pi / 1,545 \text{ où } R'$$

représente le rayon de la surface de vitesse moyenne nulle et $d' = R' - R_1$

CHANDRASEKHAR [22] [23] montre que le système (I.9) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbb{D} \mathbb{D}^* - \lambda^2 \frac{k^2}{v}) (\mathbb{D} \mathbb{D}^* - \lambda^2) v = \frac{4A\lambda^2}{v^2} \left(A + \frac{B}{r^2} \right) v \quad (I,11)$$

où $\mathbb{D} = \frac{d}{dr}$ et $\mathbb{D}^* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$ avec comme conditions au limites :

$$v = 0 : (\mathbb{D} \mathbb{D}^* - \lambda^2) v = 0 : \mathbb{D}(\mathbb{D} \mathbb{D}^* - \lambda^2 - \frac{k}{v}) v = 0 \text{ pour } r=R_1 \text{ et } r=R_2$$

Sa méthode de résolution [22] utilisant un processus variationnel dans le cas d'un petit espace annulaire, est particulièrement commode pour déterminer les composantes de vitesse de la perturbation. (cf chapitre V)

Pour $m = 0$ il trouve : $T_c = \frac{4 R_1^2 d^4}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{\Omega}{v} \right)^2$ dont la valeur critique est :

$T_{Cc} = 3390$. Il a traité séparément le cas : $d = R_1 = \frac{R_2}{2}$ qui requiert une analyse différente. Ses résultats donnent :

* Meksyn a voulu ainsi rendre hommage à Taylor ; en fait la valeur P utilisée par ce dernier est proportionnelle à $1/T_m$

$$T'_c = \frac{64}{9} R_1^4 \left(\frac{\Omega_1}{v} \right)^2 \quad (R_1 / R_2 = 1/2) \text{ avec } T'_{cc} = 33.100 \text{ pour } m = 0.$$

Enfin, toujours dans le cadre de la théorie linéaire, plusieurs auteurs ont étudié l'influence d'autres facteurs sur la stabilité de l'écoulement. Ainsi GOLDSTEIN [25] puis DI PRIMA [26] ont montré l'action stabilisante d'un léger écoulement axial et CHANDRASEKHAR [22] celle d'un champ magnétique axial.

I.2.3. - L'étude de STUART et la théorie non linéaire :

La théorie linéaire permet de connaître la forme de l'instabilité et la vitesse à laquelle elle apparaît mais laisse son amplitude indéterminée même si elle prévoit une croissance exponentielle en fonction du temps.

TAYLOR [5] avait déjà observé au cours de ses expériences de visualisation "qu'une augmentation modérée de la vitesse de rotation d'un cylindre augmentait seulement la vigueur de circulation sans changer la configuration générale des vortex". Un équilibre entre la perturbation de grandeur finie et l'écoulement moyen apparaît donc comme possible, les termes du second ordre ayant pour effet d'éviter que les vortex ne croissent indéfiniment en activité.

STUART [12] a été le premier à prévoir l'amplitude d'équilibre de la perturbation. Pour résoudre le problème il faut tout d'abord tenir compte de la distorsion de la perturbation en supposant celle-ci définie non plus par (I,8) mais par :

$$u = u_1(r, t) e^{i\lambda z} + u_2(r, t) e^{2i\lambda z} + \dots u_1^*(r, t) e^{-i\lambda z} + u_2^*(r, t) e^{-2i\lambda z} + \dots \quad (I,12)$$

et des expressions analogues pour $v = V - \bar{V}(r, t)$ et w

où le symbole * dénote un nombre imaginaire conjugué et $-$ une valeur moyenne par rapport à z .

A partir de (I,1) sans négliger les termes quadratiques on obtient le mouvement moyen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}^2) - \frac{1}{r} (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \quad (a) \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{u} \bar{v}) &= \nu \left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} \right) \bar{V} \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (I,13)$$

La différence entre (I,13) et (I,3) provient de la prise en considération des forces de REYNOLDS et de la croissance (ou décroissance) possible de la perturbation en fonction du temps.

Le bilan d'énergie concernant la perturbation obtenu à partir de (I,1) et (I,13) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz = \iint \left(- \rho \bar{u} \bar{v} \right) \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{V}}{r} \right) r dr dz - \mu \iint (\xi'^2 + \eta'^2 + \mathcal{J}'^2) r dr dz \quad (I,14)$$

Les intégrales s'appliquent sur un volume de longueur $\frac{2\pi}{\lambda}$ situé entre les deux cylindres; $\xi', \eta', \mathcal{J}'$ sont les composantes du rotationnel de la perturbation définies par : $\xi' = - \frac{\partial v}{\partial z}$; $\eta' = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$; $\mathcal{J}' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv)$

(I,14) signifie que l'accroissement pendant l'unité de temps de la perturbation est égale à la différence entre :

- l'intégrale du produit des forces de Reynolds par le cisaillement $\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{V}}{r} \right)$ qui représente la vitesse de transfert de l'énergie cinétique

de l'écoulement moyen à la perturbation.

- et la dissipation visqueuse de l'énergie critique.

STUART suppose que la principale interaction se situe entre l'écoulement moyen et le fondamental (u_1, v_1, w_1) de la perturbation, celle-ci ayant la forme donnée par la théorie linéaire dont il ne reste qu'à déterminer l'amplitude a . Il émet en outre l'hypothèse que $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ est négligeable dans

(I,13 - b) quel que soit t . Dans ces conditions il traite le cas du petit espace annulaire $\left(\frac{d}{R_1} \ll 1 \right)$ le cylindre extérieur étant fixe ($m = 0$).

A partir de (I,14), il montre que a vérifie la relation :

$$\gamma_1 = \frac{d^2}{2\nu} \frac{\partial (a^2)}{\partial t} = \gamma_2 a^2 - \gamma_3 Re^2 a^4 - \gamma_4 \frac{a^2}{\lambda^2 Ts} \quad (I,15) \text{ où } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \text{ et } \gamma_4$$

sont les intégrales de mouvement obtenues à partir de la théorie linéaire (cf chapitre V), T_s le nombre de TAYLOR défini par STUART :

$$T_s = R_1 d^3 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2$$

Si on néglige le terme en a^4 (attaché aux forces de REYNOLDS) (I,15) permet de déterminer le nombre de TAYLOR critique par $\lambda^2 T_{sc} = \gamma_4 / \gamma_2 = 1708$.

L'amplitude d'équilibre obtenue pour $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ est donnée par :

$$a_e^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} Re^2 \left(1 - \frac{T_c}{T} \right) \quad (I,16)$$

a_e est proportionnelle à la différence entre les nombres de Taylor critique et réel rapportée au nombre de TAYLOR réel. DAVEY [27] a développé l'étude de STUART. Il montre que pour un coefficient d'amplification k suffisamment petit, l'amplitude d'équilibre est donnée par une relation de la forme :

$$0 = k a_e^2 + (k_1 + k_2 + k_3) a_e^4$$

dans laquelle k_1 représente le transfert d'énergie du mouvement moyen au fondamental (distorsion du mouvement moyen par les forces de REYNOLDS) ; le terme contenant k_2 représente le transfert d'énergie du fondamental à son premier harmonique et k_3 le transfert d'énergie au fondamental dû à la distorsion de celui-ci selon la direction radiale (les deux derniers termes avaient été négligés par STUART). Son analyse est valable quelle que soit la largeur de l'espace annulaire, la résolution numérique étant menée à son terme dans les trois cas suivants :

$$(a) R_1 = d = R_2/2 : m = 0 - (b) \frac{d}{R_1} \ll 1 : m = 1 - (c) \frac{d}{R_1} \ll 1 : m = 0$$

Dans le dernier cas qui correspond à notre dispositif expérimental il montre que le premier harmonique tire son énergie du mouvement moyen plutôt que du fondamental celui-ci jouant uniquement le rôle de "catalyseur".

1.2.4. Vérifications expérimentales :

Essentiellement deux méthodes ont été utilisées pour vérifier les prévisions de la théorie linéaire :

- l'une déjà citée consiste à visualiser l'écoulement soit par injection de colorant soit par suspension de fines particules métalliques. Cette méthode, qui est à la base de l'étude de TAYLOR [5] a été utilisée après lui par de nombreux expérimentateurs. Elle permet de déterminer le nombre de TAYLOR critique, la longueur d'onde des vortex ainsi que leur forme.

- l'autre se fonde sur la mesure du couple dû au frottement exercé par l'écoulement sur les cylindres. La pente de la courbe du frottement moyen en fonction de la vitesse présente une discontinuité à l'apparition des instabilités ; on peut ainsi connaître la vitesse critique. Cette discontinuité est tout à fait analogue à celle enregistrée dans le cas d'un tube au moment de la naissance de la turbulence ce qui montre que les deux phénomènes sont bien de même nature et que l'écoulement de COUETTE au delà de la vitesse critique est dans un régime pré-turbulent malgré son caractère laminaire permanent dans l'espace et dans le temps.

WENDT [28] puis TAYLOR [29] ont utilisé cette méthode pour différentes configurations. Leurs montages ne permettent pas d'éliminer les frottements parasites qui s'exercent sur les extrémités des cylindres. Plus récemment DONNELLY [30] a conçu un système analogue au montage de COUETTE [16] avec cylindres de garde destinés à éliminer cet effet ; nous comparerons leurs mesures avec nos résultats au chapitre V.

La théorie non linéaire permet de déterminer le frottement supplémentaire dû à la perturbation ; dans le cas du petit espace annulaire les théories de STUART et de DAVEY donnent des résultats analogues qui recouvrent l'expérience de TAYLOR à 7 % près dans le domaine de vitesse : $\Omega_c - 3 \Omega_c$.

On peut remarquer à ce sujet que les mesures de couples représentent des valeurs "moyennes" au sens de la théorie non linéaire puisqu'elles sont prises dans la direction de la périodicité.

Deux méthodes permettant des mesures plus localisées ont été présentées. ces dernières années :

- DONNELLY [31] a employé ce qu'il appelle la "technique à ions" (DONNELLY, REIF et SUHL [32], DONNELLY et SCHWARZ [33] : connue également sous le nom de "méthode de la double couche" : il recueille sur une électrode annulaire située à la surface du cylindre extérieur, le courant traversant un liquide très peu conducteur utilisé pour l'écoulement. Avec TANNER [34] il a montré qu'un tel dispositif est directement sensible à la composante radiale de la vitesse. Il peut ainsi déterminer l'apparition des vortex puis suivre la croissance de leur amplitude (DONNELLY et SCHWARZ [35]). La méthode a le désavantage d'être relative, en ne permettant pas des mesures en régime laminaire stable, et, jusqu'à présent peu reproductible ; de plus la configuration annulaire de l'électrode ne permet pas de détecter des fluctuations éventuelles selon θ (direction azimutale).

- l'instrument de mesure utilisé par SNYDER et LAMBERT [36] est une sonde à thermistance chauffée située en paroi du cylindre extérieur fixé. Dans cette méthode la variation relative de l'écart de température entre le liquide et la thermistance lorsqu'il y a mouvement par rapport au repos est proportionnelle à la puissance $1/3$ du gradient de vitesse existant à sa surface [37 - 38] .

Ces auteurs ont étudié dans le cas d'un grand espace annulaire, l'évolution de l'amplitude d'équilibre des vortex en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur et montré que la théorie de DAVEY concernant les différents harmoniques de la perturbation était valable bien au delà de ce que l'on était en droit d'attendre à la suite des hypothèses faites pour l'établir. La méthode doit en principe permettre d'effectuer des mesures absolues ; il est cependant difficile de les obtenir à cause de la dérivée des phénomènes thermiques.

On peut citer enfin l'emploi par COLES et VON ATTA [39] d'un anémomètre à fil chaud pour explorer l'espace annulaire. Cette technique a le défaut de perturber notablement l'écoulement ; de plus l'interprétation des mesures obtenues par ce moyen est très difficile étant donnée la complexité du

champ de vitesse.

I.3 - Instabilité du second type et mouvement ultérieur

Le fait que l'analyse de DAVEY, dans le cas le plus simple d'un petit espace annulaire, ne convienne pas aux mesures de frottements pour $\Omega > 3 \Omega_c$ indique que l'écoulement se fait selon un mode différent de celui prévu par le premier type d'instabilité à partir d'une certaine vitesse au delà Ω_c .

Les expériences de SCHULTZ - GRUNOW et HEIN [40] et de DONNELLY et FULTZ [41] montrent qu'il peut apparaître un second type d'instabilité non symétrique, périodique selon θ , ayant d'autant plus de chance d'être observée que l'espace annulaire est petit. DI PRIMA [42] puis ROBERTS [43] ont traité le problème linéaire d'une perturbation périodique selon oz et θ . Leurs calculs, bien qu'approximatifs, montrent que le mouvement de COUETTE devient instable à une telle perturbation pour une vitesse très peu supérieure à la vitesse critique de TAYLOR. Les ondes azimuthales se déplacent alors à une vitesse angulaire proche de la vitesse moyenne des deux cylindres ($\Omega_1/2$ si $\Omega_2 = 0$).

COLES [6] a fait une étude très intéressante à ce sujet en utilisant une méthode de visualisation tout à fait adaptée. Lorsqu'il augmente progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur, celle du cylindre extérieur restant fixe, il constate tout d'abord l'instabilité périodique selon θ . (la figure 1 - 3 précise le domaine de chaque instabilité). Il apparaît un nouvel équilibre qui correspond à l'interaction des deux modes de perturbation. Le mouvement résultant est défini par un nombre d'onde axial λ et un nombre d'onde circonférentiel λ' . En continuant d'accroître la vitesse il obtient une succession d'états définis chacun par un couple de valeurs (λ, λ') jusqu'à ce que certaines irrégularités se manifestent et transforment peu à peu le régime transitoire en écoulement turbulent.

Cette observation coïncide tout à fait avec le schéma conçu par LANDAU pour représenter l'évolution du mouvement entre le régime laminaire stable et le régime turbulent.

COLES remarque également que l'obtention d'un état déterminé (λ, λ') n'est pas fonction uniquement du nombre de Reynolds (ou de Taylor) de l'écou-

lement mais dépend de "toute l'histoire antérieure du mouvement" en particulier de la manière dont on atteint la vitesse que l'on désire étudier. DAVEY, DI PRIMA et STUART ont présenté très récemment [44] un travail théorique qui constitue la première tentative pour expliquer ces phénomènes. Ils ont étudié la stabilité des cellules de TAYLOR par rapport à une perturbation doublement périodique, selon oz et selon θ et montré que lorsque celle-ci possède la même longueur d'onde axiale que la première instabilité et un déphasage de $\pi/2$, le mouvement devient instable pour une vitesse supérieure de 8% à la vitesse critique de TAYLOR dans le cas particulier : $\frac{d}{R_1} \ll 1$, $m = 0$; les cellules ne sont alors plus séparées par des plans mais par des ondes qui se déplacent dans le sens de l'écoulement. Etant donné la forme très générale de la perturbation choisie leur étude recouvre au moins qualitativement une grande partie des résultats expérimentaux cités précédemment.

1.4 - Conclusion

L'analyse de nombreux travaux consacrés à la transition de l'écoulement de COUETTE montre que peu d'expérimentateurs ont tenté de déterminer les caractéristiques locales du mouvement, autrement que par visualisation. La seule méthode présentée permettant une telle étude et dont l'emploi reste assez délicat, a été utilisée dans le cas d'un grand espace annulaire [36]. Or le cas du petit espace annulaire a un double avantage : d'une part il conduit à certaines simplifications dans le traitement des équations et offre ainsi plus de possibilités théoriques ; d'autre part il correspond mieux à l'image des états d'équilibre successifs proposée par LANDAU pour caractériser le régime intermédiaire. C'est pourquoi, ayant mis au point au laboratoire en commun avec Mr. LEBOUCHE, une méthode d'investigation locale des écoulements nous avons choisi de l'utiliser pour l'étude du mouvement de COUETTE dans le cas particulier où les deux cylindres ayant des rayons peu différents, le cylindre intérieur est seul mobile. Dans ce chapitre l'analyse des travaux a été faite succinctement mais à l'occasion de la discussion des résultats nous reviendrons plus en détail sur les théories exposées.

CHAPITRE II

PRINCIPE DE LA METHODE DE MESURE SON APPLICATION A L'ETUDE DES ECOULEMENTS

II. 1 - Choix de la méthode.

Parmi les méthodes utilisées pour l'étude des écoulements certaines font appel aux propriétés diffusionnelles du fluide en mouvement. Ainsi la technique de l'anémométrie à fil chaud permet par la mesure d'un transfert de chaleur de déterminer la vitesse instantanée d'un écoulement gazeux. Pour les écoulements liquides on ne dispose pas d'une méthode aussi valable; à côté de la technique du "film chaud" qui s'est développée depuis quelques années, on peut également envisager une étude effectuée à partir de la mesure d'un transfert de matière. Certains auteurs ont précisé l'influence de la convection sur la vitesse d'une réaction chimique contrôlée par la diffusion (MEYERNICK et FRIEDLANDER [45]); d'autres ont eu recours à des réactions de type électrochimique qui ont l'avantage, pour des couples oxydo-réducteurs convenablement choisis, de ne pas modifier les conditions hydrodynamiques de l'écoulement :

- LIN, DENTON, GASKILL et PUTNAM [46] ont étudié le transfert de matière lors de l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux fixes, qui jouaient le rôle d'anode et de cathode au cours d'une réaction d'oxydo-réduction contrôlée par la diffusion ionique. Ils ont explicité les lois de transfert global de matière en régime laminaire et turbulent.

- EISENBERG, TOBIAS et WILKE [47, 48, 49] ont fait une analyse théorique approfondie du phénomène d'électrolyse. Ils ont insisté sur la nécessité de prendre en considération les équations de mouvement pour déterminer les lois de transfert de matière par convection en montrant que la couche de diffusion définie par NERNST* n'avait pas de véritable existence physique. Etudiant le transfert entre deux électrodes cylindriques coaxiales, l'électrode intérieure tournant autour de l'axe commun, ils ont trouvé que leurs résultats expérimentaux étaient en bon accord avec les lois obtenues à

* Dans l'hypothèse de Nernst il existe au voisinage de l'électrode une couche que l'on peut considérer comme immobile et au travers de laquelle le transfert se fait par simple diffusion. De ce point de vue le flux de matière et proportionnel au coefficient de diffusion.

partir de l'analogie de CHILTON et COLBURN.

Ces travaux correspondent à des mesures globales et ne permettent de définir que des coefficients moyens de transfert associés à des surfaces d'électrode de grandes dimensions ; REISS et HANRATTY [50, 51] ont mis en évidence l'intérêt d'une étude locale. Dans leur montage la réaction électrochimique contrôlée par la diffusion se faisait selon la "technique Polarographique", au niveau d'une microcathode située en paroi d'un tuyau cylindrique. Ils se sont surtout intéressés aux fluctuations du coefficient de transfert en régime turbulent qu'ils ont cherché à relier aux fluctuations locales de vitesses au voisinage de l'électrode. A la lumière de leur travaux de précurseurs, nous avons pensé que la Polarographie pouvait constituer une méthode générale d'investigation locale des écoulements de liquides et qu'en particulier il serait intéressant de l'utiliser pour l'étude que nous nous étions fixée concernant le mouvement de COUETTE et la transition du régime laminaire au régime turbulent. Pour cela il convenait de préciser l'aspect théorique de la méthode en justifiant un modèle qui puisse valablement la représenter puis compte tenu du type de micro-électrode choisi, utiliser ce modèle pour établir la relation existant entre le flux de matière au niveau de celle-ci et le champ des vitesses en son voisinage.

II. 2 - La Polarographie : un modèle simple de transfert de matière

Si l'on plonge une électrode inattaquable dans une solution en phase liquide d'un système oxydo réducteur :



libre défini par la relation de NERNST :

$$E_{eq} = E_0 + \frac{RT}{nF} \log \frac{(Ox)_0}{(Red)_0} \quad (II,1) \text{ où } E_0 \text{ représente le potentiel normal}$$

du système, $(Ox)_0$ et $(Red)_0$ les concentrations** en produits oxydant et réducteur au sein de la solution, R la constante des gaz parfaits (8,32 Joules/d°K) T la température absolue (°K), n le nombre d'électrons mis en jeu

* Les potentiels sont définis par rapport à une origine arbitraire : électrode à hydrogène ou électrode au calomel.

** La relation (II,1) concerne en fait les activités qui sont très voisines des concentrations lorsque celles-ci sont faibles ($\leq 10^{-5}$ mole /cm³).

dans la réaction et F le nombre de FARADAY (96 500 C). Si l'on impose à l'électrode un potentiel $E \neq E_{eq}$, l'équilibre (1) se déplace de manière à ce que les concentrations au niveau de celle-ci vérifient :

$$E = E_0 + \frac{RT}{nF} \log \frac{(Ox)_{el}}{(Red)_{el}} \quad (II.2)$$

Il s'établit un courant qui durera jusqu'à ce que les concentrations au sein de la solution réalisent le nouvel équilibre défini par (II.2). Ce courant, conséquence du déplacement des ions est dû à trois phénomènes :

- la migration des ions dans le champ électrique existant entre l'électrode considérée et l'électrode de référence.
- la diffusion déterminée par le gradient de concentration sensible surtout au voisinage de l'électrode.
- le transport dû à l'agitation ou à l'écoulement organisé de la solution .

En ajoutant à la solution un gros excès d'électrolyte "indifférent" inactif dans les conditions de potentiel imposées on peut éliminer presque totalement la part de migration qui revient à l'ion actif ; le courant enregistré est alors uniquement dû à la convection (diffusion + transport) des ions actifs au voisinage de l'électrode.

En régime stationnaire de transfert il n'y a pas d'accumulation ni de perte de substance, par conséquent l'apparition ou la disparition de substance à la surface de l'électrode est exactement compensée par diffusion. Le courant peut s'exprimer sous la forme :

$$i = k_{red} [(Red)_0 - (Red)_{el}] = k_{ox} [(Ox)_0 - (Ox)_{el}] \text{ où } k_{red} \text{ et } k_{ox}$$

sont les coefficients de transfert des formes réductrice et oxydante, fonctions de la géométrie de la cellule d'électrolyse et du mouvement de la solution.

L'équation de la courbe : intensité-potentiel dans le cas d'un système (1) rapide s'écrit alors :

$$E = E_0 + \frac{0.058}{n} \log \frac{k_{red}}{k_{ox}} + \frac{0.058}{n} \log \frac{i - i_{ox}}{i_{red} - i} \quad (II,3) \text{ où } i_{ox} \text{ et } i_{red}$$

désignent respectivement les courants limites de réduction et d'oxydation lorsque (Ox) el = 0 ou bien (Red) el = 0 (ceci suppose que le courant est limité par l'électrode considérée et en aucun cas par l'électrode de référence).

La quantité $E_{\frac{1}{2}} = E_0 + \frac{0.058}{n} \log \frac{k_{red}}{k_{ox}}$ constitue le potentiel de demi-

vague ($i = \frac{i_{ox} + i_{red}}{2}$), elle est indépendante des concentrations et le plus

souvent très voisine de E_0 . Lorsque l'oxydant est seul, ce qui est le cas dans la plupart de nos expériences, la vague de réduction a pour équation :

$$E_c = E_{\frac{1}{2}} + \frac{0.058}{n} \log \frac{i_{ox} - i}{i} \quad (II,4).$$

La figure 2.1. représente la courbe de polarisation de i en fonction de $(E_c - E_{\frac{1}{2}})$, l'axe des abscisses étant orienté vers les potentiels négatifs. Pour $E_c - E_{\frac{1}{2}} > 0.174$ V le courant est pratiquement nul ($i < 10^{-3} \cdot i_{ox}$) ; au voisinage de 0 il y a une augmentation très rapide, ainsi pour $E_c = E_{\frac{1}{2}}$: $i = i_{ox}/2$, puis le courant tend vers la valeur limite i_{ox} . Dès que $(E_c - E_{\frac{1}{2}}) < -0.174$ V : $(i_{ox} - i) / i_{ox} < 10^{-3}$ c'est à dire que le palier de courant est vite atteint dans le cas d'un système rapide.

Lorsque i est grand, à cause d'une concentration importante ou d'une forte convection, il se peut que la réaction électrochimique ne soit pas infiniment rapide devant la vitesse d'apport de matière, il faut alors introduire un terme supplémentaire dans (II,4) pour tenir compte de la "polarisation" chimique [52] ; le palier de courant est atteint moins rapidement que dans le cas précédent car il faut imposer une différence de potentiel $(E_c - E_{\frac{1}{2}})$ supérieure pour approcher le courant limite de réduction également à 10^{-3} près. EISENBERG et ses collaborateurs [49] ont discuté de l'importance du décalage qui ne dépasse jamais quelques dizaines de millivolts dans les conditions où ils emploient le couple Ferro-Ferricyanure de Potassium

Ainsi le courant limite déterminé par la hauteur du palier de la courbe $i(E)$ constitue une mesure du flux de matière à l'électrode dans des conditions de diffusion bien précises : d'après sa définition même, le courant limite est atteint lorsque la concentration du corps

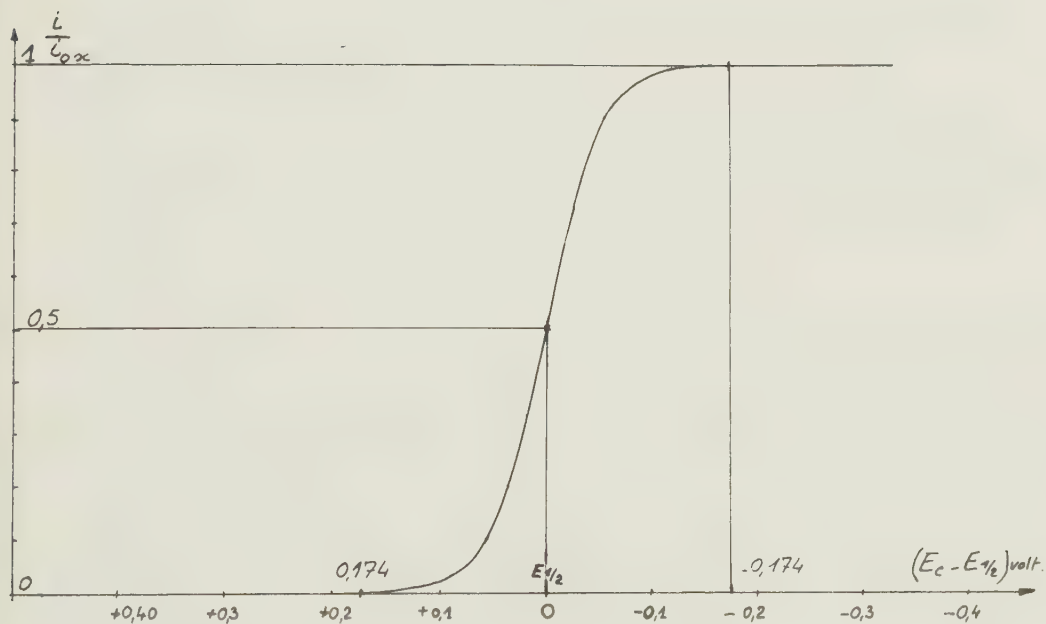


Figure : 2.1. Courbe théorique de polarisation.

actif au niveau de l'électrode est nulle ; Si de plus l'électrode est de petites dimensions, ce courant est faible et l'on peut considérer que la concentration du corps actif reste constante au sein de la solution. Une électrolyse effectuée dans ces conditions est appelée Polarographie ; elle peut être représentée par un modèle simple de transfert de matière entre l'infini (loin de l'électrode) où la concentration C reste constante et la microélectrode où C est nulle.

II.3 - Application à l'étude des écoulements - Traitement de trois cas particuliers importants.

Dans le dispositif de COUETTE qui a été réalisé le cylindre intérieur est seul mobile, les microélectrodes circulaires sont situées en paroi du cylindre extérieur fixe pour ne pas perturber l'écoulement. Etant donné le grand rayon de courbe de la surface (11 cm) par rapport aux dimensions de l'électrode ($< 0,1$ cm), le modèle de transfert peut être défini de la manière suivante : (fig 2.2)

- un plan limite dans le demi espace $y > 0$ un fluide en mouvement contenant une substance en concentration C_0 . Dans le plan se trouve une surface circulaire de rayon r_0 capable d'absorber cette substance grâce à une réaction très rapide et d'assurer ainsi à son niveau une concentration nulle. Le flux de matière au travers du plan est nul sauf au niveau de la surface active ($r < r_0$) avec $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. Il s'agit d'établir la relation existant entre le champ des vitesses et le champ des concentrations pour qu'à partir des mesures de flux on puisse atteindre les caractéristiques de l'écoulement. Une telle relation est fournie par l'équation du bilan instantané de matière appliquée au cas d'un fluide en mouvement. Cette équation s'écrit :

$$D \cdot \Delta C = \overrightarrow{\text{grad}} C \cdot \vec{V} + \frac{\partial C}{\partial t} \quad (\text{II},5)$$

où D représente le coefficient de diffusion de la substance active et $\vec{V}$ le vecteur vitesse de l'écoulement satisfaisant aux équations de continuité et du mouvement supposé connu.

Le problème est entièrement déterminé par les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} C &= 0 \text{ pour } r \leq r_0 \text{ et } y = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 \text{ pour } r > r_0 \text{ et } y = 0 \\ C &\rightarrow C_0 \text{ pour } r \text{ ou } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (II,6)$$

La résolution formelle de (II,5) complétée par les conditions mixtes (II,6) n'est le plus souvent pas possible même si l'on considère le problème permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). De ce fait on est contraint dans la plupart des cas d'utiliser des méthodes numériques ou de faire des hypothèses simplificatrices. Dans ce qui suit nous présentons la solution exacte du problème lorsque le liquide est immobile et les solutions approchées, numérique ou formelle dans le cas de deux types d'écoulement importants pour la suite de notre étude.

II.3.1. Transfert de matière dans le cas d'un disque circulaire le liquide étant immobile.

Dans le cas particulier où le liquide est immobile l'équation du bilan de matière est grandement simplifiée ; si l'on suppose en outre le régime de diffusion établi ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) elle se réduit à :
D. $\Delta C = 0$ (II,7).

Ainsi pour une géométrie déterminée la répartition des concentrations sera identique quelque soit le coefficient de diffusion. Quant au flux de matière d'après sa définition même, il sera dans tous les cas proportionnel au coefficient de diffusion.

Si l'électrode est circulaire on tient compte de la symétrie de révolution autour de l'axe oy et (II,7) peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0 \quad (II,8)$$

Montrons que la solution du problème peut s'exprimer en fonction d'une seule variable U qui est la somme des rayons vecteurs r_1 et r_2 définis sur la

figure 2.2 comme étant, dans le plan (r, y) , les distances du point $M (r, y)$ aux extrémités de l'électrode.

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(r - r_0)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(r + r_0)^2 + y^2} \end{aligned} \right\} U = r_1 + r_2$$

On pose $C (r, y) = \varphi (U)$. Après calcul des dérivées partielles de $\varphi (U)$ par rapport à r et y l'équation (II,8) devient :

$$\varphi'' \left[2 + 2 \frac{(r^2 - r_0^2) + 2y^2}{r_1 r_2} \right] + \varphi' \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r} \left(\frac{r - r_0}{r_1} + \frac{r + r_0}{r_2} \right) \right] = 0 \quad (\text{II},9)$$

En multipliant (II,9) par $r_1 r_2$ et en remarquant que : $U^2 = 2r^2 + 2r_0^2 + 2y^2 + 2r_1 r_2$ et $r_1 - r_2 = \frac{4rr_0}{U}$, il vient :

$$\varphi'' (U^2 - 4r_0^2) + 2 \varphi' (U - 2r_0^2 / U) = 0 \quad (\text{II},10)$$

où n'intervient que la variable U .

$$(\text{II},10) \text{ peut s'écrire : } \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{-2 (U^2 - 2r_0^2)}{U (U^2 - 4r_0^2)} = -\frac{1}{U} - \frac{U}{U^2 - 4r_0^2} \text{ après décom-}$$

position en éléments simples.

$$\text{Ce qui s'intègre selon : } \varphi' = \frac{k_1}{U \sqrt{U^2 - 4r_0^2}} \text{ soit } \varphi = k_2 \arcsin \frac{2r_0}{U} + k_3$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\varphi = 0 \text{ pour } U = 2 r_0 : \text{ c'est à dire } k_2 + k_3 = 0$$

$$\varphi \rightarrow C_0 \text{ pour } U \rightarrow \infty \text{ donc } k_3 = C_0$$

On peut vérifier facilement que la troisième condition concernant la dérivée normale de φ dans le plan de $y = 0$ se trouve alors également satisfaite.

La solution de (II,8) est donc :

$$C = C_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2 r_0}{\left[(r-r_0)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[(r+r_0)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{II},11)$$

Ce résultat rejoint celui obtenu de manière différente par CARSLAW et JAEGER [53] dans le cas d'un problème analogue de transfert thermique où une source circulaire à température constante diffuse de la chaleur dans le demi-espace $y > 0$.

Les courbes d'isoconcentration sont des ellipsoïdes de révolution définis par : $r_1 + r_2 = \text{constante}$ (fig. 2.3) ; le domaine de diffusion* s'étend relativement loin de l'électrode puisque pour $r_1 + r_2 = 13 r_0$ la concentration n'est que de $0,90 C_0$. Le gradient de concentration dans le plan $y = 0$ est donné par :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{-2C_0}{\pi r_0 \sqrt{1 - r^2/r_0^2}} \quad \text{pour } r \leq r_0 \quad \text{et } 0 \quad \text{pour } r > r_0$$

on en déduit le flux de matière sur l'électrode

$$j_0 = \int_0^{r_0} -D \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \times 2 \pi r dr = -4 C_0 r_0 D \quad (II,12)$$

Le signe - indique que le flux est dirigé vers les $y < 0$ ce qui est physiquement évident ; il est proportionnel à la concentration C_0 et au coefficient de diffusion, conformément aux résultats classiques de la polarographie lorsque le liquide est immobile, mais également au rayon de l'électrode. Le flux de matière à l'électrode détermine un courant, chaque ion réagissant apporte n charges élémentaires l'intensité du courant limite est donc :

$$I = 4 C_0 r_0 D n F \quad (II,13)$$

Pour pouvoir comparer les résultats entre eux on a l'habitude de rapporter le flux à l'unité de concentration et à l'unité de surface de l'électrode. On définit cette grandeur comme le "coefficient de transfert" du système.

Dans le cas qui nous occupe ce coefficient vaut : $\frac{4 D}{\pi r_0} = K_0$, il est inversement

proportionnel au rayon de l'électrode. La quantité adimensionnelle $\frac{2 r_0 K_0}{D}$ est l'équivalente pour le transfert de matière du nombre de NUSSELT

* On convient de définir comme domaine de diffusion la région limitée par le plan de l'électrode et la courbe correspondant à la concentration $0.9 C_0$.

pour le transfert de chaleur on l'appelle nombre de SHERWOOD, il est égal à $8/\pi$.

Le problème de diffusion se trouve ainsi complètement résolu ; on peut cependant remarquer qu'il constitue un cas idéal qui se rencontre rarement dans la pratique ; en effet dans l'équation (II,8) il n'est pas tenu compte des variations de densité existant dans la solution au voisinage de l'électrode et dues au gradient de concentration. Ces variations même très faibles peuvent créer des mouvements de convection qui modifient le transfert. Ce problème sera discuté à la lumière des résultats expérimentaux présentés au chapitre IV.

II.3.2. Etude théorique de transfert dans le cas d'un profil linéaire de vitesse

Dans notre dispositif expérimental l'espace annulaire est petit devant les rayons des cylindres, on peut donc considérer, en première approximation, qu'en régime subcritique l'écoulement s'effectue comme entre deux plans parallèles distants de d dont l'un se déplace à la vitesse $V_1 = R_1 \Omega_1$ par rapport à l'autre fixe à la surface duquel affleure l'électrode. La vitesse du fluide n'a qu'une composante V_x fonction linéaire de la distance y au plan fixe $V_x = S y$. Le gradient $S = V_1 / d$ caractérise l'écoulement.

Nous avons cherché à résoudre le problème de diffusion dans ce cas particulier. Malgré l'extrême simplicité du champ de vitesse l'étude du phénomène reste complexe à cause du caractère tridimensionnel du champ des concentrations conséquence des dimensions finies de l'électrode. Pour faciliter la résolution nous avons remplacé dans le modèle théorique l'électrode circulaire utilisée en pratique par une bande de largeur L et de longueur indéfinie perpendiculairement à la direction de l'écoulement (fig. 2.4). La détermination du champ des concentrations est alors ramenée à un problème à deux dimensions pour lequel l'équation du bilan de matière (II,5) devient :

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = S y \frac{\partial c}{\partial x} \quad (\text{II},14)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} C &= 0 \text{ pour } |x| < L/2 \text{ et } y = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 \text{ pour } |x| > L/2 \text{ et } y = 0 \\ C &\rightarrow C_0 \text{ lorsque } x \text{ ou } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (II,15)$$

Par rapport au problème de l'électrode circulaire posé expérimentalement cela revient à négliger le terme de diffusion transversale à l'écoulement

$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$. Le transfert de masse à surface d'électrode égale s'en trouve

d'autant plus diminué que ce terme est important vis-à-vis du terme de transport c'est à dire aux faibles vitesses.

L'écart entre les deux solutions est maximal en absence d'écoulement. Dans ce cas en effet il n'existe pas de régime stable de diffusion pour l'électrode rectangulaire indéfinie comme nous allons le montrer :

En régime de diffusion établi (II,14) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0 \quad (II,16)$$

Si l'on pose comme précédemment :

$$C(x, y) = \varphi(U) \text{ avec } U = \sqrt{(x-L/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-L/2)^2 + y^2} = r_1 + r_2$$

(II,16) devient :

$$\varphi''(U^2 - L^2) + \varphi'(U) = 0 \quad (II,17)$$

qui s'intègre immédiatement selon*

$$\varphi = k_1 \operatorname{Argch} \frac{r_1 + r_2}{L} + k_2$$

La condition $C = 0$ sur l'électrode entraîne $k_2 = 0$. Si l'on suppose que la concentration est maintenue à la valeur C_0 sur un contour elliptique défini par $r_1 + r_2 = k_0$. On voit que k_1 doit être égale à $\frac{C_0}{\operatorname{Arch} \frac{k_0}{L}}$.

$$\operatorname{Arch} \frac{k_0}{L}$$

* Sneddon (55) étudiant la répartition des vitesses dans un écoulement non visqueux au travers d'une fente trouve par l'intermédiaire des fonctions de Green une relation analogue pour la fonction "potentiel" mais ne précise pas les conditions à l'infini ce qui a pour conséquence de supprimer le rôle de la constante k_1 .

Plus l'ellipse est grande et plus k_1 est petit. A la limite pour une ellipse infiniment grande (image du $\frac{1}{2}$ espace $y > 0$) $k_1 \rightarrow 0$. Par conséquent au voisinage de l'électrode la concentration est nulle, de même le flux. Il ne peut y avoir une répartition stable des concentrations autre qu'identiquement nulle ; en régime transitoire de transfert à partir d'une répartition uniforme de concentration le flux de matière diminue au fur et à mesure que s'agrandit le domaine de diffusion et tend vers zéro pour un domaine infini, alors que pour une électrode circulaire il tend vers une limite non nulle définie par (II,12).

Pour résoudre l'équation (II,14) compte tenu des conditions (II,15), EUCKEN [54] puis REISS et HANRATTY [51] ont négligé le terme de diffusion dans le sens de l'écoulement $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$. Cette hypothèse réduit la validité de leurs

résultats pour les domaines de faibles gradients de vitesse. LING [56] a montré en effet que ce terme n'était négligeable que lorsque $P = \frac{SL^2}{D} > 5000$, ce qui correspond pour notre dispositif expérimental à une vitesse quatre fois supérieure à la vitesse critique à partir de laquelle (II,14) cesse d'être valable puisque l'écoulement est tridimensionnel. Une telle simplification ne peut donc être envisagée dans notre cas sans introduire des erreurs importantes.

La résolution formelle (II,14) n'étant pas possible nous avons du utiliser une méthode numérique à partir d'une forme discrétisée de cette équation.

II.3.2.1. Discrétisation et méthode de calcul

En supposant la fonction $C(x, y)$ continue * ainsi que ses dérivées en chaque point du demi-espace $y > 0$ on peut la développer à x ou y constant.

Etant donné un réseau rectangulaire de maille h_x et h_y respectivement dans les directions x et y (fig 2.5), au voisinage du point 1 (x_1, y_1) le premier membre développé de l'équation (II,14) s'écrit :

$$\left[\frac{C[2] + C[4]}{h_x^2} + \frac{C[3] + C[5]}{h_y^2} - 2 C[1] \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \right] \text{ au 4ème ordre.}$$

* On remarquera que si cette hypothèse est physiquement évidente pour C il n'est pas de même de ses dérivées qui sont discontinues dans le plan $y=0$ pour $x = \pm L/2$

près, et le second membre :

$$S y_1 \left[\frac{C [2] - C [4]}{2h_x} \right] \quad \text{au 3ème ordre près}$$

En posant $y_1 = 1h_y$ (1 étant le numéro de la ligne du point 1), $h_x = \alpha h_y = \alpha p$ (p étant le pas élémentaire du réseau), $\frac{Sp^2}{D} = R$ il vient :

$$C [5] + C \frac{[4]}{\alpha^2} \left[1 + \frac{\alpha \cdot 1 \cdot R}{2} - 2 C [1] \right] + \frac{1}{\alpha^2} + C \frac{[2]}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha 1 R}{2} \right] + C [3] = 0 \quad (II,16)$$

Si le point 1 se trouve aux limites du réseau on tient compte des conditions imposées sur la concentration ou sur sa dérivée ; dans ce dernier cas l'équation (II,16) quelque peu modifiée s'écrit :

$$C \frac{[4]}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha R}{2} \right) - 2 C [1] \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + C \frac{[2]}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha R}{2} \right) + \frac{2}{3} C [3] = 0 \quad (II,17)$$

On obtient ainsi un système linéaire dont le nombre d'équations et d'inconnues est égal au nombre de noeuds du réseau. Pour le résoudre nous nous sommes appuyés sur une étude effectuée à l'Institut de Calcul de NANCY, en particulier par P. NOEL [57]. Il s'agit d'une méthode itérative de type RICHARDSON dont la convergence est optimisée par l'emploi des polynômes de TCHEBYCHEF. Les grandes lignes de cette méthode sont présentées en annexe I.

Le choix des dimensions du réseau et des pas h_x et h_y représentent un compromis qui permet de conserver à la méthode une précision convenable sans nécessiter des temps de calcul excessifs pour la résolution du système ; nous avons utilisé des réseaux de 200 points au plus (5×40 ou 10×20 selon les vitesses). La direction de l'écoulement selon x nous a conduit à prendre $h_x = 2 h_y = 2 p$ et à choisir p de manière à ce qu'il ait 6 points sur l'électrode (fig. 2 5)

Le programme de calcul écrit en langage ALGOL (annexe I) a été traité au centre de Mathématiques appliquées de Grenoble sur machine I.B.M. 1401 et 7040 . Le temps nécessaire à chaque résolution a varié de

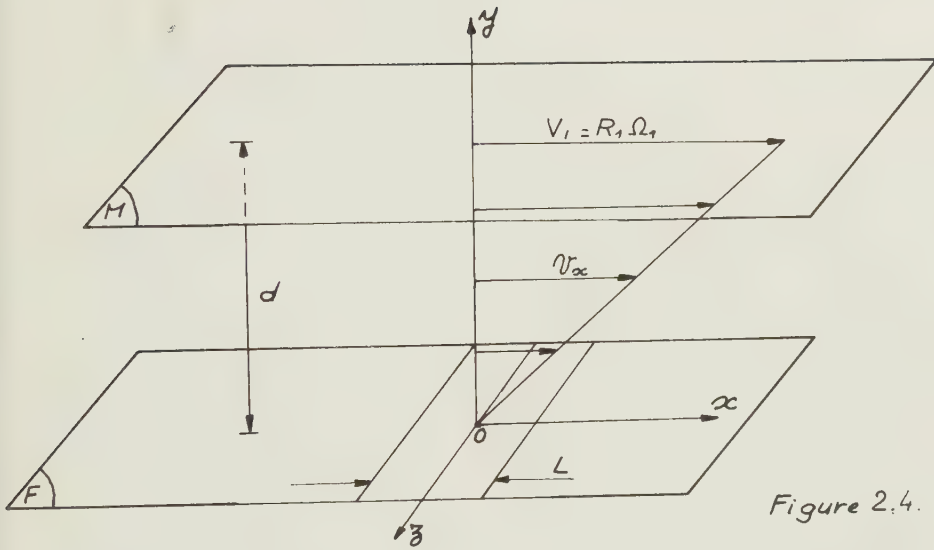


Figure 2.4.

Ecoulement de Couette.

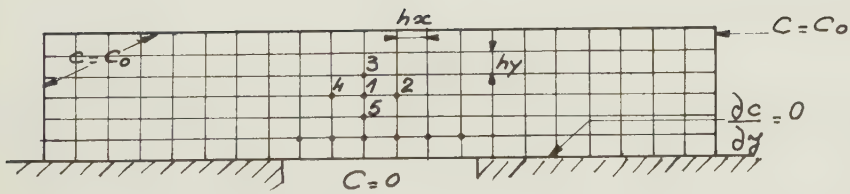


Figure 2.5.

Réseau 5x20.

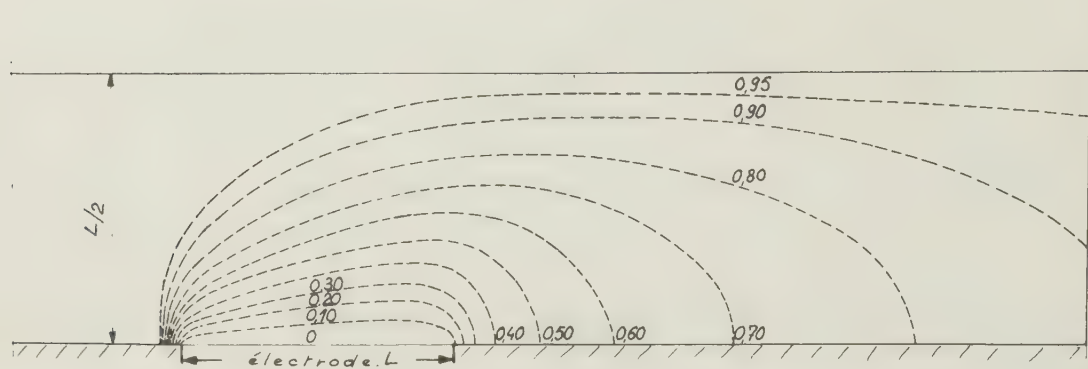
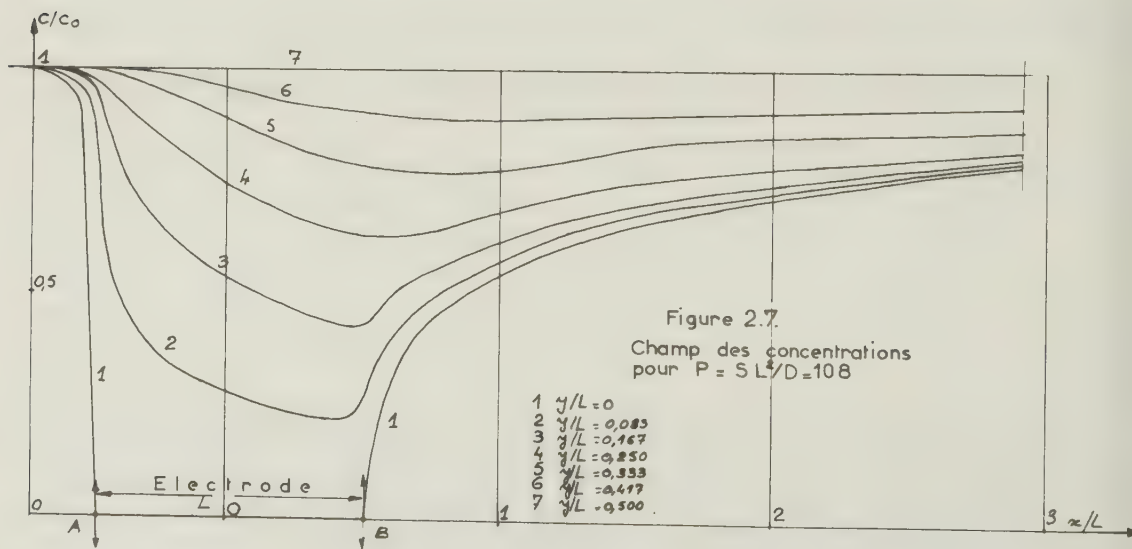


Figure 2.6. Courbes d'isoconcentration pour $P = 108$



3 à 11 minutes selon les vitesses et les dimensions des réseaux.

II.3.2.2. Résultats

n_0 étant le nombre de points du réseau situés dans le plan $y = 0$ et définis par la condition $C = 0$ il convient tout d'abord de remarquer que la résolution de (II,14) par discrétisation est valable pour toutes les électrodes dont la largeur L vérifie :

$$(n_0 - 1) h_x' < L < (n_0 + 1) h_x$$

Les résultats présentés ci-dessous correspondent à une largeur "moyenne" définie par $L = n_0 \cdot h_x$. Nous pensons ainsi avoir minimisé les erreurs (à ce titre la cohérence des résultats peut être interprétée comme une justification "à posteriori" de ce choix). La variable $R = \frac{S \cdot P^2}{D}$ introduite précédemment s'exprime en fonction de $P = \frac{SL^2}{D}$, groupement adimensionnel caractéristique de l'écoulement. Dans notre cas où $n_0 = 6$: $P = 144R$

La résolution du système a été menée pour les valeurs suivantes de P :

0 - 14,4 - 50,4 - 108 - 216 - 360 - 504 - 720 - 1080 - 1440.

Ces valeurs ont été choisies pour correspondre aux conditions expérimentales en régime subcritique d'écoulement.

- Pour $P = 0$ (liquide immobile) les résultats différents notablement selon les réseaux ; ceci est conforme au fait que dans ce cas le problème n'a pas de solution autre que nulle lorsque le domaine est infini ; ainsi plus les réseaux sont grands plus les concentrations à une distance donnée de l'électrode sont faibles.

- Par contre dès que P atteint la valeur 50,4 nous obtenons, en ce qui concerne les points situés au dessus de l'électrode, les mêmes valeurs à 1 % près pour tous les réseaux utilisés. Ce résultat indique que la zone de diffusion se limite au voisinage immédiat de l'électrode aussitôt qu'il y a mouvement.

La figure 2-6 représente à titre d'exemple la répartition des concentrations lorsque $P = 108$, elle est complétée par la figure 2-7 qui montre l'évolution

de C/C_0 selon x pour différentes valeurs de y/L .

Si l'on suit le filet de fluide correspondant à la première ligne de points intérieurs au réseau ($y/L = 0.089$) on voit qu'en amont la concentration reste voisine de C_0 jusque très près du bord A de l'électrode. Au niveau de A il y a une décroissance rapide qui s'atténue ensuite le long de l'électrode. A partir du bord aval B on note une croissance relativement plus lente de la concentration, les courbes étant alors peu différenciées selon les valeurs de P ; elle ne reprend la valeur $0.9C_0$ qu'à une distance de l'ordre de $4 \times L$ en aval de l'électrode; ceci s'explique par le fait que la diffusion de matière d'un filet à l'autre du fluide tendant à uniformiser les concentrations au sein de la solution, est un phénomène lent par rapport à la vitesse de l'écoulement. Ce raisonnement n'est cependant pas valable lorsqu'il existe de forts gradients de concentration au voisinage d'une paroi, les deux termes étant alors du même ordre de grandeur. Le cas se présente au bord amont de l'électrode où l'on observe un important "tassement" des courbes d'équiconcentration (fig. 2-6); dans cette région on ne peut donc affirmer que le terme de diffusion selon l'écoulement

$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)$ est négligeable devant le terme de transport.

A partir du champ des concentrations nous avons déterminé la valeur de la dérivée normale $G = \left(\frac{\partial C/C_0}{\partial y/L}\right)_{y=0}$ pour les points situés sur l'électrode. Les

résultats sont présentés sur la figure 2-9.

On notera que le tracé des courbes au voisinage des extrémités surtout au bord amont est peu précis du fait de la discontinuité de la fonction

$G : G \rightarrow \infty$ lorsque $|x| \rightarrow L/2$ par valeurs inférieures

$G \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow L/2$ par valeurs supérieures

Le flux de matière à l'électrode est donné par :

$$\Phi = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} -D \cdot G \, d\left(\frac{x}{L}\right)$$

L'intégration des courbes de la figure 2-8 nous a permis d'obtenir Φ/D , c'est à dire le groupement adimensionnel de SHERWOOD KL/D (compte tenu de

Figure 2.8.

Gradient de Concentration
au voisinage de l'électrode.

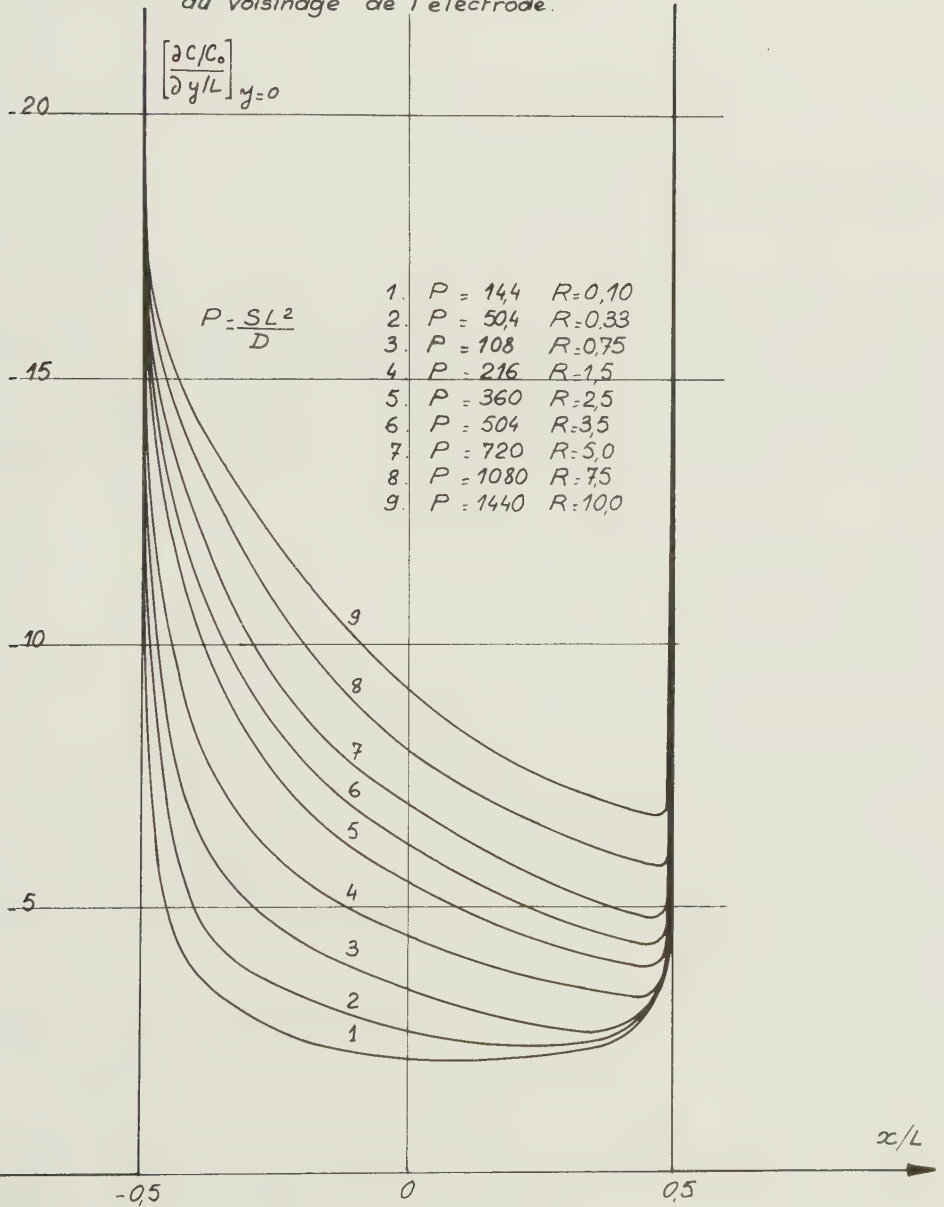




Fig. 2-9. Electrode rectangulaire.
Transfert de matière.

la définition du coefficient de transfert : $K = \Phi / L$ en fonction de la variable P. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

$P = SL^2/D$	14,40	50,4	108	216	360	504	720	1080	1440
KL / D	2,88	3,46	4,18	5,26	6,30	6,96	7,84	8,86	9,80

L'incertitude sur KL/D conséquence de l'incertitude sur le tracé des courbes dérivées a été évaluée à 0.1. Sur la figure 2.9 où sont reportées ces valeurs nous voyons qu'après un début de croissance faible pour lequel le transfert de matière est assuré principalement par diffusion troublée, KL/D tend rapidement à croître selon une puissance de P voisine de $1/3$. Ce résultat est à rapprocher de celui de REISS et HANRATTY [51] qui proposent pour un domaine de gradients de vitesse plus élevés la relation :

$$K = \frac{1,5}{g^{1/3} \gamma (4/3)} \left(\frac{D^2 S}{L} \right)^{1/3} \quad (II,18) \text{ qui s'écrit sous forme adimensionnelle}$$

$$\frac{KL}{D} = 0.807 \left(\frac{SL^2}{D} \right)^{1/3} \quad (II,19)$$

La valeur de KL/D que nous obtenons pour la valeur maximale $P = 1440$ est supérieure de 7 % environ à celle prévue par (II,19) ; la pente de la courbe étant alors légèrement inférieure à $1/3$ (0.325) ; on peut donc considérer que la relation de REISS et HANRATTY représente une solution asymptotique du problème valable à quelques % près pour $P > 5000$, en dessous de cette valeur notre calcul constitue une meilleure approche du phénomène. Enfin, connaissant le flux de matière on peut évaluer l'épaisseur de la couche fictive de diffusion. En définissant une épaisseur moyenne δ par

$$\Phi = D \frac{\partial(C/C_0)}{\partial(y/L)} = D \times \frac{1}{\delta/L} = KL$$

il vient :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{D}{KL} \quad (II,20)$$

Pour un nombre de SHERWOOD égal à 10 on voit que l'épaisseur de la couche de diffusion serait déjà de $1/10^{\circ}$ de la largeur de l'électrode. Ainsi se trouve précisé le caractère local de la mesure en fonction des dimensions de l'électrode.

II.3.3. Etude de transfert dans le cas d'une vitesse possédant une composante normale à paroi

On peut imaginer le cas où la vitesse du fluide possède une composante V_y normale à la paroi du fait de l'existence de tourbillons par exemple. Cette composante s'annule sur la paroi plus vite que la composante tangentielle, on peut donc la supposer de la forme $V_y = \beta y^2$, β étant un coefficient à déterminer selon le type de l'écoulement. Compte tenu des résultats du paragraphe précédent nous nous plaçons dans le cas où la composante tangentielle $V_x = Sy$ est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ et que la concentration soit égale à C_0 jusqu'au bord amont de l'électrode pris comme origine des abscisses. Pour une électrode rectangulaire perpendiculaire à l'écoulement, l'équation du bilan de matière s'écrit alors :

$$S \cdot y \frac{\partial C}{\partial x} + \beta y^2 \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (\text{II},21) \text{ avec les conditions aux limites :}$$

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 \text{ pour } x = 0 \text{ et pour tout } y > 0 \\ C &= 0 \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } y = 0 \\ C &\rightarrow C_0 \text{ pour } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (\text{II},22)$$

Pour la résoudre prenons une nouvelle variable définie par $\eta = \frac{y}{\varphi(x)}$

$$(\text{II},21) \text{ devient : } -3\eta^2 \frac{\partial C}{\partial \eta} \left[\frac{S\varphi' \varphi^2}{3D} - \frac{\beta\varphi^3}{3D} \right] = \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (\text{II},23)$$

(II,22) ne dépend que de η si φ vérifie la relation :

$$\frac{1}{3D} (S\varphi' \varphi^2 - \beta\varphi^3) = 1 \quad (\text{II},24)$$

En supposant que l'électrode a une largeur suffisamment petite pour que β puisse être considéré constant sur toute sa surface et en choisissant la constante d'intégration pour que $\varphi(0) = 0$ la solution s'écrit :

$$\varphi = \left(\frac{e^{3\beta x/5} - 1}{\beta/3D} \right)^{1/3}$$

ainsi

$$\eta = y \left(\frac{\beta/3D}{e^{3\beta x/5} - 1} \right)^{1/3} \quad (\text{II,25}) \text{ et les conditions}$$

(II,22), deviennent $C = 0$ pour $\eta = 0$

$C \rightarrow C_0$ pour $\eta \rightarrow \infty$

La solution de (II,23) est alors évidente :

$$C = C_0 \frac{\int_0^\eta \frac{e^{-\eta^3}}{e^{3\beta x/5} - 1} d\eta}{\int_0^\infty \frac{e^{-\eta^3}}{e^{3\beta x/5} - 1} d\eta} = \frac{C_0}{\gamma(4/3)} \int_0^\eta \frac{e^{-\eta^3}}{e^{3\beta x/5} - 1} d\eta \quad (\text{II,26})$$

Elle est du même type que celle trouvée par HANRATTY dans le cas d'une composante unique V_x mais la définition de η n'est pas la même. La fonction $\int_0^\eta \frac{e^{-\eta^3}}{e^{3\beta x/5} - 1} d\eta$ a été tabulée par ABRAMOWITZ [58] ce qui permet d'obtenir facilement le champ des concentrations en fonction de S et de β .

La dérivée normale $\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{C_0}{\gamma(4/3)} \times \frac{\eta}{y}$ détermine le flux Φ de matière à l'électrode.

$$\Phi = \int_0^L D \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \int_0^L k_1 \left(\frac{1}{e^{3k_2 x} - 1} \right)^{1/3} dx \text{ en posant}$$

$$k_1 = \frac{DC_0}{\gamma(4/3)} \left(\frac{\beta}{3D} \right)^{1/3} \text{ et } k_2 = \frac{\beta}{S};$$

par le changement de variable $t = (e^{3k_2 x} - 1)^{1/3}$ on trouve

$$\Phi = \frac{k_1}{3k_2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-t+t^2}{(1+t)^2} + \sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{t\sqrt{3}}{2-t} \right]_{x=0}^{x=L} \quad (II,22)$$

(II,27) se simplifie dans l'hypothèse où $3k_2 L$ est petit devant l'unité. En pratique cette condition est toujours vérifiée à cause des faibles dimensions de l'électrode et des petites valeurs de $\beta/S = k_2$.

Dans ce cas on montre facilement par un développement limité que :

$$\Phi = \frac{k_1}{3k_2} \left(\frac{t^2}{2} + \xi t^3 \right)_{x=L}$$

Soit après simplification :

$$\Phi = \frac{Co}{\gamma(4/3)} \times \frac{3}{2} \times 9^{1/3} \times (D^2 S L^2)^{1/3} (1 + k_2 L) \quad (II,28)$$

On retrouve le flux $d\Phi$ au gradient de vitesse S multiplié par un facteur dans lequel intervient la composante normale. Le plus souvent $k_2 L$ est négligeable devant l'unité et l'on retrouve le cas traité par HANRATTY (II,18).

Le calcul indique donc que l'existence d'une composante normale de la vitesse a peu d'effet sur le transfert qui est essentiellement déterminé par le gradient de vitesse tangentielle. Ce résultat n'était pas évident à priori car l'existence de faibles vitesses normales aurait pu être compensée par le fait qu'elles sont associées à de forts gradients de concentration. Ainsi se trouve justifiée a posteriori l'hypothèse d'HANRATTY qui ne prend pas en considération la composante normale à la paroi dans le cas d'un écoulement turbulent.

II. 4 - Conclusions

L'analyse théorique qui a été faite montre que la méthode polarographique peut-être utilisée pour l'étude des écoulements liquides. Dans trois cas particuliers importants, où le calcul a été mené jusqu'à son terme, il a été possible de relier directement au champ des

vitesse le transfert de matière à l'électrode. A la vue des résultats obtenus on peut tirer plusieurs conclusions:

-Lorsque le liquide est immobile le domaine de diffusion s'étend largement autour de l'électrode par contre dès qu'il y a mouvement il se limite au voisinage immédiat de celle-ci. Ainsi reprenant l'exemple des figures 2-6 et 2-7 défini par $P = \frac{SL^2}{D} = 108$ et $\frac{KL}{D} = 4,18$ on voit que pour un électrode de largeur 1mm et un coefficient de diffusion de $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, ce qui représente approximativement nos conditions expérimentales "l'épaisseur" du domaine de diffusion n'excède pas 0,5 mm alors que le gradient de vitesse tangentielle n'est que de $0,1 \text{ s}^{-1}$.

Le champ des concentrations se trouve donc profondément modifié par un écoulement même très lent. Ceci montre que la méthode est sensible au moindre mouvement existant dans le liquide, en particulier si le liquide est au repos on peut détecter d'éventuels courants de convection d'origine thermique ou dus à une répartition non uniforme de la concentration au sein de la solution.

-Pour des gradients de vitesse plus élevés la relation (II,20) montre que l'épaisseur de la couche (fictive) de diffusion se réduit à quelques $\frac{1}{100}$ mm n'atteignant ainsi que les filets de fluide à proximité immédiate de la paroi. Ce résultat a deux conséquences :

1) - Du point de vue expérimental il faut apporter un grand soin à la réalisation des électrodes pour que les conditions hydrodynamiques à la paroi soient bien définies ; en particulier il faut veiller à ce que l'échelle de rugosité des surfaces et les discontinuités inévitables entre les électrodes et leur support soit d'un ordre de grandeur nettement inférieur à l'épaisseur de la couche de diffusion (irrégularités de l'ordre du micron au maximum).

2) - Dans cette zone de diffusion, quelque soit le mouvement au sein de la solution, la vitesse a une composante essentiellement tangentielle car la composante normale est très amortie à une distance aussi faible de la paroi ; ce qui explique que dans le cas d'un écoulement possédant une composante de vitesse normale à l'électrode celle-ci n'ait que peu d'influence sur le transfert de matière qui se trouve

presqu'entièrement déterminé par la vitesse tangentielle. Si de plus on considère que dans cette région la vitesse tangentielle varie linéairement en fonction de la distance y à la paroi : $V_x = y \left[\frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_{y=0} = S_y$ on voit que

la méthode polarographique permet de connaître le gradient de vitesse à la paroi et d'atteindre le coefficient local de frottement défini par :

$$\tau = \mu \left[\frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_{y=0}$$

-Enfin on peut remarquer que la méthode de calcul utilisée au paragraphe II.3.2. conduit à la détermination du champ des concentrations dans le liquide en aval de l'électrode, ce qui n'est pas possible à partir de la solution proposée par HANRATTY. Après passage au dessus de l'électrode de largeur L les couches de fluide les plus proches de la paroi sont appauvries en substance active, elles ne retrouvent une concentration voisine de C_0 qu'à une distance de l'ordre de $4.L$ en aval. Ce résultat a de l'importance dans le cas où l'on désire disposer des électrodes très proches les unes des autres dans la direction de l'écoulement pour déceler des corrélations longitudinales. Il impose qu'un intervalle minimal soit respecté pour que les conditions de diffusion soient les mêmes pour chacune d'elles.



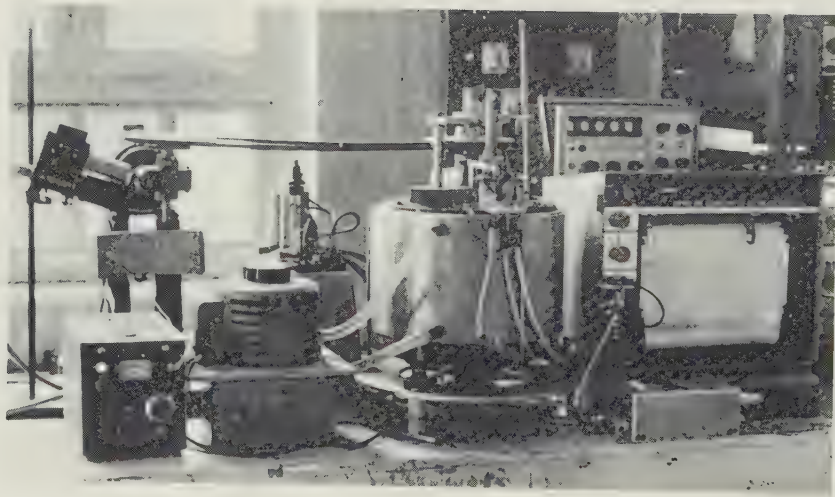


Figure 3.1 Vue d'ensemble du dispositif expérimental

CHAPITRE III

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

MISE EN OEUVRE DE LA METHODE POLAROGRAPHIQUE

Après avoir analysé les travaux antérieurs sur l'écoulement de Couette et défini le principe de la méthode choisie pour son étude, nous allons maintenant préciser les conditions expérimentales dans lesquelles nous avons opéré ; cela concerne la géométrie de l'appareil et la mise en oeuvre de la méthode polarographique avec la définition d'un mode de dépouillement des mesures pour la détermination aussi exacte que possible des courants limites de réduction compte tenu des phénomènes parasites observés. Nous présentons enfin la technique de visualisation que nous avons utilisée dans le but de mieux interpréter certains aspects du mouvement.

III.1 - L'écoulement

III.1.1. Géométrie du montage

A la suite de l'étude des travaux consacrés au mouvement de Couette il nous a semblé indiqué de construire un montage correspondant "au petit espace annulaire", le cylindre extérieur étant fixe (chapitre I). La figure 3.2 représente le dispositif utilisé. Les deux cylindres électriquement et chimiquement neutres ont été réalisés par moulage en Araldite puis tournés et polis jusqu'à leurs cotes définitives.

Pour le cylindre intérieur A les relevés de diamètre effectués en différents points sont tous compris dans l'intervalle : $(20,000 \pm 0,002)$ cm ; de hauteur totale 14 cm, il comprend deux évidements de 5 cm : l'un à sa partie supérieure jouant le rôle de déversoir permet de maintenir le liquide à un niveau constant, l'autre à sa partie inférieure sert de cloche à air pour éviter que la butée, utilisée pour supporter et centrer le cylindre, baigne dans la solution et la pollue. La distance entre la base du cylindre et le fond de l'appareil a été fixée à 3 cm.

Le cylindre B mesure 20 cm de haut (3 cm de garde en haut pour éviter les

projections de liquide à grande vitesse). Son diamètre ($22,000 \pm 0,004$) cm est défini avec moins de précision que celui du cylindre A, car sa faible épaisseur : 0,8 cm lui confère une moindre rigidité au tournage. Le choix de cette épaisseur résulte d'un compromis entre la nécessité d'une thermostatisation convenable (paroi d'autant plus mince que l'Araldite est mauvais conducteur de la chaleur) et la disposition d'une épaisseur suffisante pour la réalisation du cylindre et le logement des électrodes.

La stabilité du montage est assurée par la chambre de thermostatisation en Acier Inox C dont le rôle est également de réaliser la concentricité des deux cylindres. En effet le cylindre extérieur coulisse au travers de la chambre avec un jeu minimal (tous deux sont à 20° C, solidaires du fait des dilatations différentes des deux matériaux) et la partie supérieure de l'arbre du cylindre intérieur est guidée par un roulement logé dans un cadre qui est centré par emboîtement sur la chambre. Les trois axes des pièces A, B et C sont donc théoriquement confondus. En pratique le décentrement de l'arbre ne dépasse jamais 10^{-3} cm. Dans ces conditions les relevés concernant l'espace annulaire sont tous compris dans l'intervalle $d = (1,000 \pm 0,005)$ cm. On remarquera que la connaissance de d est très importante puisque cette quantité intervient à la puissance trois dans le nombre de TAYLOR (I,11). Les imperfections constatées $\frac{|\Delta d|}{d} = \frac{1}{200}$ correspondent déjà à une incertitude de $\pm 0,75$ % sur la vitesse critique.

Un vérin permet, au moment du montage, en agissant sur le cylindre B, d'amener la butée au contact du cylindre A ; deux autres sont utilisés pour régler avec précision l'aplomb de l'ensemble de l'appareil.

La température peut-être réglée à mieux que $1/10^{\circ}$ C (précision du thermostat utilisé) si l'on ne s'écarte pas trop de la température ambiante : $(18 \pm 8)^{\circ}$ C. L'équilibre thermique dans les cas extrêmes est difficile à réaliser et l'existence d'un gradient inverse (températures plus fortes en bas qu'en haut de l'espace annulaire) même très faible, perturbe complètement les mesures aux faibles vitesses d'écoulement.

III.1.2. Transmission du mouvement rotatif

L'entraînement du cylindre intérieur se fait par poulies et courroie. Le moteur utilisé : 1/4 CV à courant continu présente l'intérêt

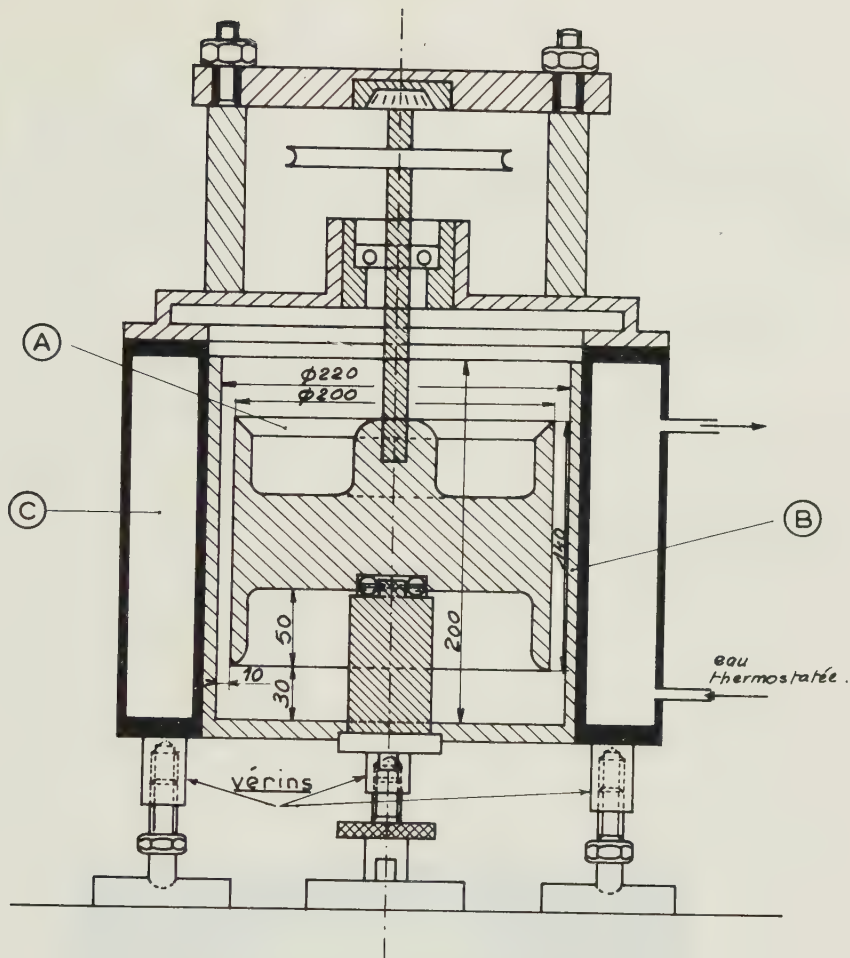


Figure 3.2. Vue en coupe de l'appareil

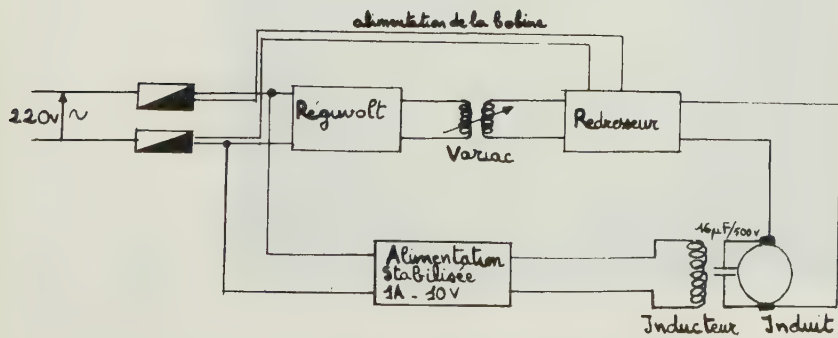


Figure 3.3. Régulation du moteur.

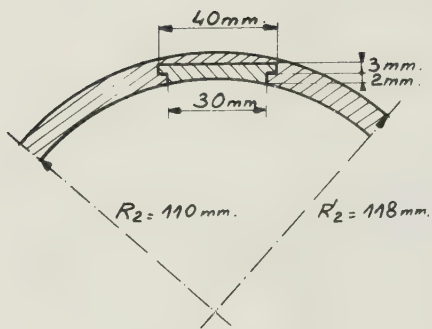


Figure 3.4a.
Coupe du cylindre
extérieur avec la règlette.

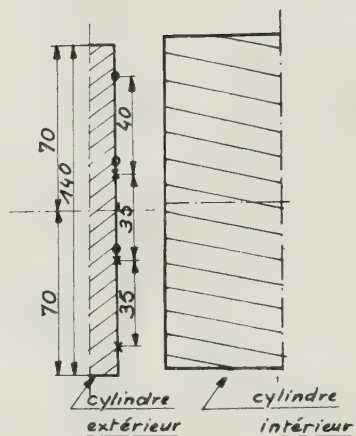


Figure 3.4b : les croix repèrent les
électrodes de la règlette en position basse,
les cercles en position haute.

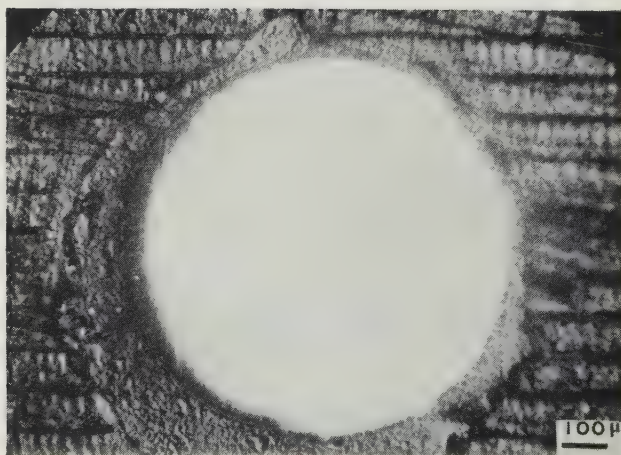


Figure 3 - 5 Vue d'une électrode

de pouvoir fournir une puissance à peu près constante sur une gamme de vitesses relativement grande. Il est muni de deux réducteurs 1/10 et 1/50, utilisables soit couplés soit séparément, et d'un jeu de poulies. On peut ainsi faire varier la vitesse dans le rapport de 1 à 6000, de manière continue dans des domaines successifs de rapport 1 à 20. La constance de la vitesse assurée à quelques % près n'aurait pas été suffisante, il a donc fallu séparer l'alimentation de l'inducteur de celle de l'induit. Le schéma de montage est représenté sur la figure 3 - 2.

- l'inducteur est alimenté en courant continu stabilisé de 1 A sous 10 V.

- l'alimentation de l'induit se fait par le montage en série d'un régulateur de tension (réguvolt), un auto-transformateur variable (variostat) sur lequel on agit pour modifier la vitesse de rotation du moteur, et d'un système de redresseurs.

On arrive ainsi à maintenir la vitesse constante à 1/500^e près pendant quelques minutes et à 1 % près pendant plusieurs heures.

La vitesse de rotation du cylindre intérieur comprise entre 1/600 t/s et 10 t/s est déterminée soit à partir de celle de l'arbre moteur par un dispositif photoélectrique raccordé à un fréquencesmètre Rochard, soit directement au chronomètre pour les vitesses très faibles (< 0,02 t/s)*. La précision de la mesure est évaluée à 0,2 %.

La photographie 3.1 montre l'ensemble du montage.

III.2 - Mise en oeuvre de la méthode polarographique

III.2.1. La cellule

Le volume délimité par les deux cylindres et le fond constitue la cellule de mesure (2 litres environ) ; précisons la disposition des électrodes et la nature du liquide polarographique utilisé.

III.2.1.1. Les électrodes

Les microcathodes sont situées en paroi du cylindre fixe. Deux types de montage ont été réalisés avec deux cylindres extérieurs de mêmes dimensions.

* Pour éviter les vibrations la courroie de transmission toilée (type Texrope) est remplacée par une courroie en caoutchouc. Dans les deux cas nous n'avons jamais décelé de glissement de la courroie sur les poulies.

- dans l'un les électrodes sont fixes et situées à mi-hauteur du cylindre mobile ; deux sont en Nickel (diamètres proches de 0,5 et 0,25 mm) et une en Platine (1 mm).

- dans l'autre a été pratiquée une glissière où peut coulisser une réglette ajustée et tournée avec le cylindre pour épouser au mieux la surface interne de celui-ci. La réglette comprend trois électrodes en Platine (diamètre proche de 1 mm) situées à 35 mm l'une de l'autre, en aval de l'axe de celle-ci pour minimiser les effets d'un éventuels ressaut : figure 3 - 4 a et b.

Son déplacement (± 20 mm) est assuré par une tige filetée de pas 1 mm fixée à sa partie supérieure et un écrou moleté solidaire du bâti. On peut apprécier $1/8$ de tour soit 0.125 mm. On explore ainsi 11 cm de la génératrice du cylindre intérieur (hauteur totale 14 cm).

Les électrodes sont encastrées dans leur support (cylindre ou réglette) et collées à l'Araldite de manière à ce que seule la section droite des fils soit au contact avec la solution. Elles sont ensuite polies au papier potée jusqu'à 4 - 0, à l'alumine 12 et 24 h, dégraissées puis rincées à l'eau permutée de résistivité $>10^{-6}$ $\Omega \cdot \text{cm}$ (ces deux dernières opérations étant répétées avant chaque usage). La qualité du poli est importante car elle contrôle certains phénomènes parasites tels que le dégagement prématuré d'hydrogène et conditionne la validité du modèle théorique proposé pour représenter le phénomène.

Les aspérités subsistant après polissage ont été évaluées par interférométrie comme étant au plus d'une fraction de micron.

Les surfaces des électrodes mobiles ont pu être mesurées par pesée d'un agrandissement photographique obtenu à l'aide d'un microscope métallographique (fig. 3 - 5). L'erreur commise est difficilement chiffrable ; elle a deux origines :

- d'une part la limite entre l'électrode et son support n'est pas très bien définie ce qui entraîne une incertitude de 0,5 % sur le diamètre moyen d_0 et 1 % sur la surface A.

- d'autre part les surfaces des électrodes sont très légèrement convexes* comme le montre les observations au microscope ce qui a pour effet de modifier la surface apparente de l'électrode du point de vue de l'écoulement. Cette seconde source d'erreur est supposée négligeable .

* Ce défaut de quelques microns au maximum est pratiquement inévitable ; le support étant constitué par un matériau plus tendre que le platine les bords de l'électrode se trouvent un peu plus abrasés que le centre.

Les surfaces des électrodes fixes ont été déterminées par comparaison.
Les tableaux ci-dessous présentent les résultats obtenus :

Electrodes mobiles: Fil de platine $\varnothing 1\text{mm}$		Surface A (mm^2)	diamètre moyen d_0 (mm)
De bas en	C ₁	$0,777 \pm 0,008$	$0,992 \pm 0,005$
haut de la	C ₂	$0,745 \pm 0,008$	$0,973 \pm 0,005$
réglette	C ₃	$0,712 \pm 0,008$	$0,952 \pm 0,005$
Electrodes fixes			
	Fil de platine $\varnothing 1\text{mm}$	$0,765 \pm 0,008$	$0,986 \pm 0,005$
	Fil de nickel $\varnothing 0,50$	$0,132 \pm 0,002$	$0,410 \pm 0,003$
	Fil de nickel $\varnothing 0,25$	$0,0398 \pm 0,0008$	$0,225 \pm 0,002$

Au cours des expériences nous avons remarqué que les électrodes en Nickel s'altéraient au cours du temps sans doute par formation d'oxyde ce qui avait pour conséquence de diminuer leur surface active et nécessitait un polissage fréquent. Pour cette raison nous les avons peu utilisées.

L'anode est constituée par une couronne en Nickel de grande dimension (100 cm²) polie au papier potée 4-0 et disposée au fond de la cellule.

III.2.1.2. Le liquide polarographique

LEBOUCHE [59] après LIN et ses collaborateurs a discuté de l'emploi de plusieurs couples oxydo-réducteurs. Il apparaît que le couple Ferri-Ferro Cyanure de Potassium est un de ceux qui correspond le mieux au modèle théorique proposé. La réaction de réduction :

$\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-} + e \rightarrow \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ à l'avantage d'être rapide et de ne pas affecter la surface de la microcathode.

Nous avons utilisé des solutions aqueuses de Ferricyanure* seul ; les concentrations étant comprises entre $0,3 \times 10^{-6}$ et $4,5 \times 10^{-6}$ mole /cm³.

Pour éliminer les effets de migration ionique sur la substance active nous avons ajouté en excès de la soude* comme électrolyte indifférent ($0,1 \times 10^{-3}$ à $0,2 \times 10^{-3}$ mole/cm³). Les concentrations étant très faibles, des traces

* Ferricyanure de Merck ou de Prolabo R.P. $M_{\text{Ferri}} = 329 \text{ g}$

Soude R.P de Prolabo M = 40 g.

d'impuretés peuvent introduire des courants parasites notables ; aussi la cellule doit-elle être soigneusement lavée et rincée avant chaque usage avec de l'eau permutée également employée pour la préparation de la solution ; enfin, pour éviter un courant dû à l'oxygène dissous il est nécessaire d'éliminer celui-ci par un barbotage prolongé d'azote dans la solution (1 heure). Cette opération s'effectue dans un bac de stockage avant l'introduction du liquide dans la cellule.

L'ion Ferricyanure est un complexe stable, cependant plusieurs phénomènes modifient dans le temps sa concentration au sein de la solution :

- Il s'absorbe sur les parois inertes, en Araldite ou en lucoflex de la cellule, jusqu'à un certain équilibre (cette adsorption n'existe pas, ou très peu, dans les récipients de stockage en verre ou en plexiglass).

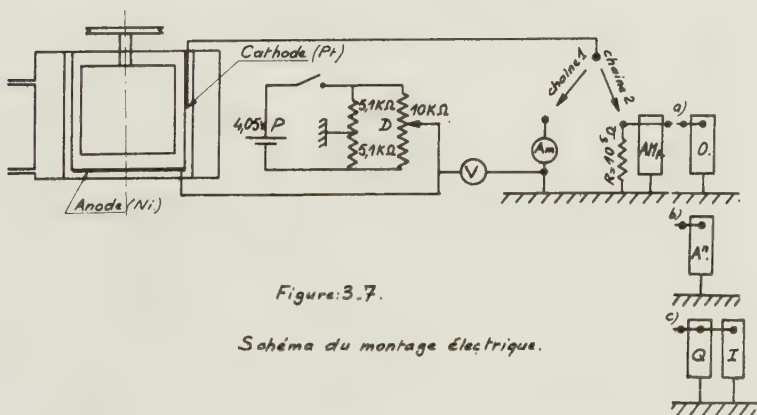
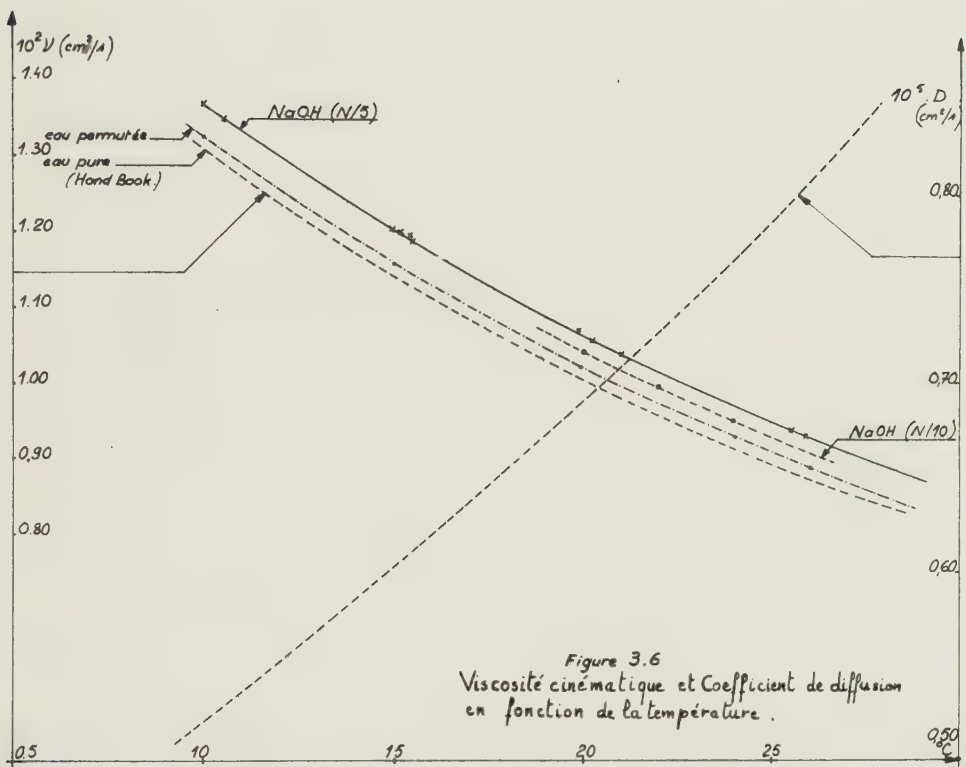
- Il floccule lentement sous l'action de la lumière (l'analyse du dépôt montre que le fer est toujours complexé sous forme de Ferricyanure). Des volets amovibles ont été disposés à la partie supérieure du montage pour maintenir la cellule dans l'obscurité.

- Par réduction cathodique il se transforme progressivement en Ferrocyanure. Cependant le processus est très lent puisqu'un courant exceptionnel de $5 \mu\text{A}$ pendant 10^{-4} s ne modifie la concentration, dans le cas le plus défavorable, que de $1/1000$.

Les deux premiers inconvénients nous ont contraints avant et après chaque expérience de mesurer la concentration réelle en Ferricyanure au moyen d'un spectographe d'absorption de type Beckmann (le maximum d'absorption de l'ion $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ correspond à une longueur d'onde de 0.417μ). De cette façon la concentration est déterminée à 1 % près (précision de l'appareil).

La viscosité du liquide polarographique a été déterminée à l'aide d'un viscosimètre capillaire. La figure 3-6 représente les résultats des mesures en fonction de la température ($10 - 30^\circ\text{C}$) pour deux concentrations en soude : N/5 et N/10. (Dans le domaine considéré la viscosité est pratiquement une fonction linéaire de cette concentration, l'effet du Ferricyanure étant négligeable). Le coefficient de diffusion D de l'ion $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ également représenté sur la figure 3 - 6 a été obtenu à partir de la formule empirique de EISENBERG [49] :

$$\frac{D\mu}{T} = 2,50 \times 10^{-10} \quad (\text{III},1)$$



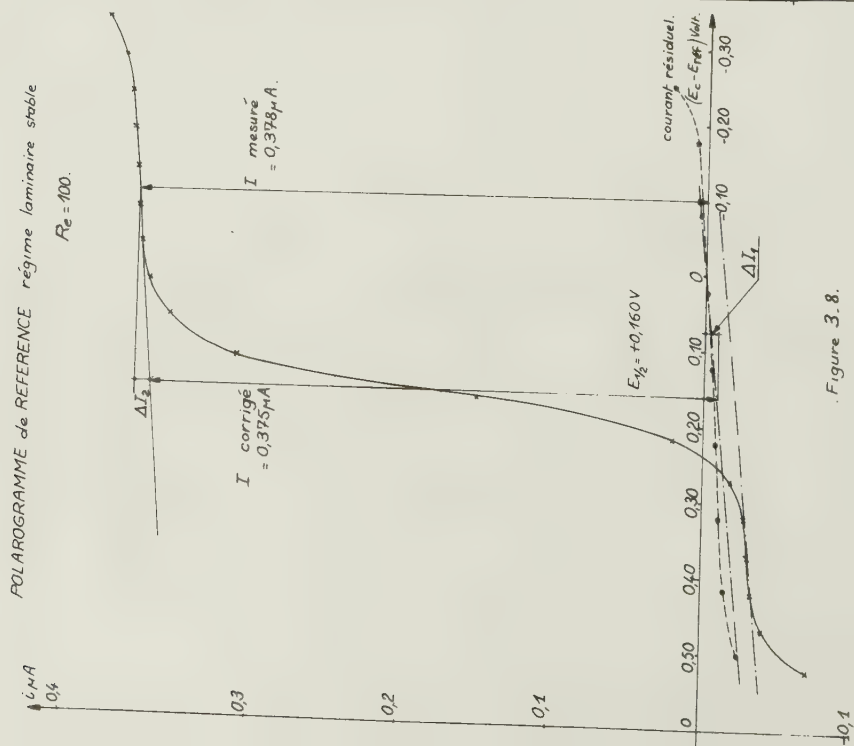


Figure 3.8.

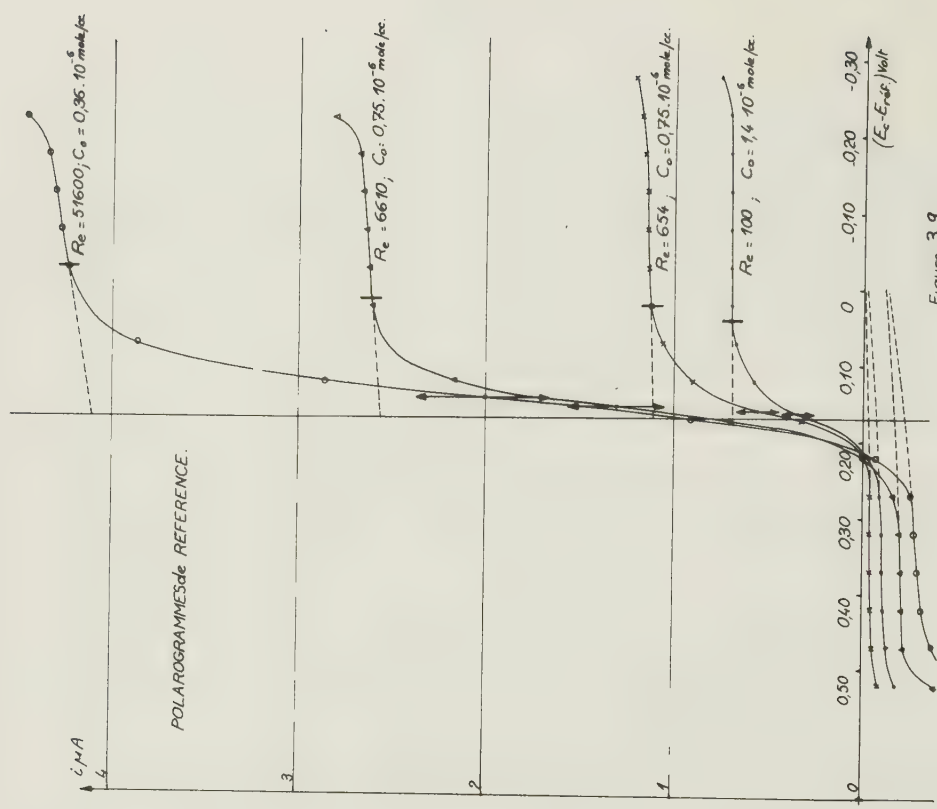


Figure 3.9

En supposant (III,1) exacte, les erreurs relatives sur D sont reliées aux erreurs relatives sur la viscosité μ et la température T par :

$$\frac{\Delta D}{D} = - \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta T}{T} \quad (\text{III},2) . \text{ Au cours d'une expérience la température}$$

de la masse en écoulement varie au maximum de $\frac{1^\circ}{10}$ C, par conséquent :

$$\frac{\Delta T}{T} \neq \frac{1}{10 \times 293} \text{ est négligeable et l'erreur sur D est pratiquement égale}$$

à l'erreur sur μ . Il y a deux types d'erreur sur μ : l'une est due à l'étalonnage de la figure 3 - 6 elle-même, évaluée à 0,5 % et l'autre à l'incertitude sur la température $\frac{2 \Delta T}{100} = \frac{1}{500}$; par conséquent $\left| \frac{\Delta D}{D} \right| = \frac{7}{1000}$

En fait (III,1) n'est vraisemblablement vérifiée qu'à 1 % près c'est à dire que $\left| \frac{\Delta D}{D} \right| < \frac{2}{100}$

III. 2 .2 Circuit électrique

Il s'agit de tracer la courbe (intensité potentiel) caractéristique du phénomène polarographique à partir de laquelle est déterminé le courant limite de diffusion qui mesure le flux de matière à l'électrode. Le montage électrique utilisé à cet effet est représenté sur la figure 3 - 7. Une pile à mercure P, de fem stable (4,05 V), placée aux bornes d'un dispositif potentiométrique D calculé pour qu'elle ne débite pas de façon notable, permet de faire varier les potentiels relatifs de l'anode A et des cathodes $C_1, C_2, C_3 \dots$

Les courants de polarisation sont mesurés au moyen d'un microampèremètre : Am (Kipp BD1 et BD3) placé en série avec la cellule ; sa sensibilité est comprise entre 0,1 et 5 μ A pleine échelle et sa vitesse de déroulement entre 60 et 57 600 mm/h. La dérive de l'appareil nous a contraints après chaque mesure de faire le zéro. Dans ces conditions le courant est obtenu à mieux que 1 % près. L'inertie de l'équipage traceur ne permet pas d'enregistrer sans amortissement important des fréquences supérieures à 1 Hertz. Dans le cas de fluctuations possédant de telles fréquences l'ampèremètre

est remplacé par une résistance étalon de $10^5 \Omega$, aux bornes de laquelle on obtient des fluctuations de tension qui, amplifiées (AMP), peuvent être visualisées (oscillographe cathodique O) analysées en fréquences (An) ou bien intégrées après avoir été élevées au carré, pour obtenir leur valeur quadratique moyenne (Q et I). Deux contacteurs à voies multiples permettent les mesures simultanées des courants de deux électrodes quelconques.

La tension E entre les électrodes A et C est mesurée avec un voltmètre électronique : V (philips GM 6000) d'impédance $5 \times 10^6 \Omega$ disposé en parallèle par rapport à la cellule et l'ampèremètre pour éviter que celui-ci n'enregistre le courant passant dans le voltmètre qui peut atteindre :

$$\frac{0,5 \text{ V}}{5 \times 10^6 \Omega} = 0,10 \mu \text{ A}$$

$E = (E_C - E_A - iR)$ où E_C et E_A représentent les potentiels de C et de A par rapport à la solution et iR la chute ohmique dans la cellule. La résistance R dépend essentiellement de la concentration en soude. Nous avons trouvé qu'elle était comprise entre 2 600 et 5 200 Ω . Les courants étant au plus de $5 \mu \text{ A}$, iR vaut au maximum 0,026 V. La correction qu'il faut effectuer est faible et le plus souvent négligeable. Une autre difficulté provient de E_A . L'anode de grande dimension est théoriquement impolarisable du fait de très faibles densités de courant qui la traverse. E donne donc le potentiel de la cathode à une constante près : E_A . Dans la pratique E_A est en fait mal définie et peut varier au cours du temps. En l'absence de Ferrocyanure*, on montre [59] que la réaction anodique est l'oxydation des ions OH^- en oxygène selon (3): $4 \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4 \text{e}^-$. Cette réaction a été étudiée par CHARLOT [60]. Le potentiel d'équilibre dépend du Ph et de la concentration en oxygène (dans notre cas Ph # 13 et très peu d'oxygène). Cependant la vitesse de réaction est lente ce qui a pour effet de rendre ce potentiel très sensible à l'état de surface de l'anode en particulier l'existence d'un film d'oxyde de Nickel peut le modifier de façon notable. Il est donc préférable de mesurer E_C par rapport à une électrode au calomel saturée en KCl gardant un potentiel rigoureusement constant par rapport à la solution : $E_{\text{ref}} = 0,239 \text{ V}$ à 20° C . Son utilisation lorsque

* Ceci est encore valable pour tous les rapports de concentrations utilisés dans nos expériences $\frac{[\text{Fe}(\text{CN})_6]^{3-}}{[\text{Fe}(\text{CN})_6]^{4-}} > 10^2$.

Le liquide est en mouvement perturbe l'écoulement aussi avons nous, à chaque expérience, contrôlé le potentiel de l'anode lorsque le liquide était immobile. L'écart enregistré ($E_A - E_{ref}$) varie de 0,25 V à 0,19 V selon que la plaque de Nickel vient d'être polie ou non. Le tableau ci-dessous donne les valeurs obtenues dans un cas particulier.

$E_C - E_{ref}$	0.056	0.420	0.340	0.247	0.130	0.002	-0.060	-0.119	-0.181	-0.236
$E_A - E_{ref}$	0.217	0.217	0.218	0.218	0.218	0.219	0.219	0.219	0.219	0.219
$E_C - E_A$	0.289	0.203	0.122	0.029	-0.089	-0.217	-0.279	-0.338	-0.400	-0.455

On voit qu'au cours d'une expérience le potentiel E_A ne varie pratiquement pas ce qui justifie la procédure utilisée pour déterminer E_C . Dans ce qui suit tous les potentiels indiqués sont relatifs à l'électrode au calomel ; c'est à dire que la mesure $E = E_C - E_A$ effectuée au voltmètre est corrigée de la quantité $E_A - E_{ref}$.

III.3 - Tracé des polarogrammes et obtention des courants limites

Pour obtenir la courbe $i(E_C)$ on fait un balayage de potentiel de + 0.50 V à - 0.30 V de pas 0.05 V. A chaque potentiel il faut attendre quelques minutes la stabilisation du courant. Ce phénomène est dû à la réorganisation progressive des ions dans le nouveau champ électrique et à l'établissement du régime de diffusion.

Un exemple de polarogramme est présenté figure 3.8 avec ses caractéristiques :

La réduction du Ferricyanure commence à se produire vers + 0.30 V alors que le palier du courant de diffusion n'est atteint que pour 0.00V et se trouve limité à - 0.30 V par le dégagement d'hydrogène ; Le potentiel de demi vague est défini par $E_{\frac{1}{2}} \approx 0.160$ V. La différence essentielle avec la courbe théorique de la figure (2.1) réside dans le fait que dans la prati-

que les paliers ne sont pas horizontaux. Ceci implique l'existence de phénomènes parasites qu'il convient d'analyser et de chiffrer pour obtenir la valeur réelle du courant limite. Ce problème n'est en général pas abordé par les auteurs.

Il peut y avoir une réduction simultanée d'ions se trouvant à l'état de traces dans la solution mais surtout une microélectrolyse de l'eau utilisée comme solvant. Il s'agit d'un "courant résiduel" existant même en l'absence de Ferricyanure. Nous avons mesuré ce courant ; il est faible et peu sensible à la vitesse de l'écoulement (en supposant que tout l'oxygène dissous a été éliminé par un dégazage prolongé). Il change de signe pour $E_c \approx 0.00V$ (fig. 3.8) . En présence de Ferricyanure pur (pour les produits que nous avons utilisés: $[Fe(CN)_6]^{4-} / [Fe(CN)_6]^{3-} < 10^{-4}$) l'aspect de la courbe avant la vague n'est pas modifié. Par contre après quelques jours d'utilisation de la solution, la concentration en Ferrocyanure n'est plus nulle ; il apparaît une vague d'oxydation de ce produit qu'il convient de déduire de la vague totale (fig 3.8).

A faible vitesse le palier supérieur est légèrement incliné, du fait de la microélectrolyse de l'eau, et très sensiblement parallèle au palier inférieur ; aux grandes vitesses il est nettement plus incliné mais reste défini. Cette caractéristique s'explique difficilement par la polarisation chimique qui ne fait que décaler le palier de quelques dizaines de millivolts, peut-être est-elle due à une vague parasite de réduction d'oxygène dans le cas d'un dégazage insuffisant d'autant plus sensible que la vitesse du liquide est grande. Dans tous les cas le palier supérieur est limité par le dégagement d'hydrogène (très sensible au poli de l'électrode), dont la surtension ne dépasse jamais $- 0.30 V$ dans notre cas (fig3.9).

Compte tenu de tous ces phénomènes nous avons convenu de prendre comme valeur de l'intensité du courant limite: la différence, au potentiel de demi-vague pris en référence, entre l'ordonnée du palier supérieur et celle de la parallèle au palier inférieur menée par $\left\{ \begin{array}{l} i = 0.00 \mu A \\ E_c = 0.00 V \end{array} \right.$ qui correspond à une solution de Ferricyanure pur. Sur la figure 3 - 8 nous voyons que la détermination du courant limite (I corrigé) se fait à partir du courant mesuré (I mesuré) par l'évaluation des corrections ΔI_1 et ΔI_2 qui tiennent compte de l'inclinaison respective des paliers inférieur et supérieur.

Lorsque le domaine de vitesse étudié n'est pas trop étendu les caractéristiques des polarogrammes sont pratiquement les mêmes, dans ce cas nous opérons de la manière suivante :

- nous traçons un polarogramme de référence correspondant à une vitesse moyenne ; ceci nous permet de vérifier le bon fonctionnement de la cellule
- nous déterminons les corrections indiquées plus haut par rapport à un courant mesuré au potentiel - 0.10 V, c'est-à-dire sur le palier.
- nous mesurons pour chaque vitesse le courant enregistré à ce même potentiel et nous le corrigeons de la quantité évaluée pour la vitesse moyenne.

Les trois domaines choisis correspondent sensiblement aux trois régimes hydrodynamiques observés :

Le régime laminaire stable $0 < Re < 140$

Le régime laminaire "instable $140 < Re < 3000$

Le régime turbulent $Re > 3000$

Des polarogrammes de référence obtenus dans ces domaines sont présentés sur la figure 3.9 . Les corrections faibles dans les deux premiers cas (1 à 2%) peuvent atteindre 4 à 5 % aux grandes vitesses.

Nous pensons de cette façon déterminer le courant limite I_{d0} au flux de substance active à l'électrode à mieux que 1,5 % près compte tenu de la précision des mesures d'intensité effectuées avec le microampèremètre enregistreur (1 %).

Le coefficient de transfert K déduit de I par la relation $K = \frac{I}{nFC_0A}$ est connu avec une précision relative :

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\Delta A}{A} \leq \frac{1,5}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{3,5}{100}$$

III.4 - Visualisation de l'écoulement

Pour avoir une connaissance plus concrète de l'écoulement dans notre cas, nous avons également utilisé une méthode de visualisation. Un montage de dimension identique à celui décrit précédemment a été réalisé avec un cylindre extérieur en plexiglass. La visualisation est obtenue par réflexion d'une source lumineuse située à l'extérieur du sys-

tème, sur des paillettes d'aluminium ajoutées en petite quantité à de l'eau. Le principe en est le suivant : les particules assimilables à des petits disques entraînées dans l'écoulement s'orientent selon les filets du fluide ; lorsque la composante de vitesse est essentiellement circonférentielle elles apparaissent brillantes ; lorsque la composante radiale n'est plus négligeable elles se mettent perpendiculairement à l'arc et laissent passer la lumière sans la réfléchir. Ainsi les ventres de vortex apparaissent comme des bandes claires et les noeuds comme des bandes sombres ; de cette façon il est facile d'interpréter les films et les photographies du mouvement visualisé par cette technique.

La méthode, malgré ses défauts (absence de thermostatisation, sédimentation des paillettes à faible vitesse), s'est révélée fort intéressante et nous a permis de mieux comprendre certains résultats obtenus par la Polarographie.

CHAPITRE IV

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT DE COUETTE EN RÉGIME LAMINAIRE SUBCRITIQUE

Dans le domaine de vitesse correspondant au régime laminaire subcritique ($0 < \Omega < \Omega_c$) la solution du mouvement est connue (I,4). L'étude expérimentale du transfert de matière au niveau des électrodes situées en paroi du cylindre extérieur doit permettre de vérifier la validité du modèle théorique qui représente la méthode polarographique en précisant la forme de la loi de transfert en fonction non seulement du gradient de vitesse mais également du coefficient de diffusion de l'ion électroactif au sein de la solution et du diamètre de l'électrode.

Ce type d'écoulement présente un autre intérêt ; en effet dans le cas où l'on modifie brusquement la vitesse de rotation du cylindre intérieur ($\Omega_1 \rightarrow \Omega'_1$) il est possible d'établir la forme analytique du régime hydrodynamique transitoire qui s'en suit jusqu'au complet établissement du nouvel écoulement. En comparant la loi d'évolution de la vitesse en fonction du temps à la courbe d'évolution correspondante du transfert de matière, on peut évaluer le temps de réponse de la méthode. Cet aspect du problème est particulièrement important pour la mesure des fluctuations locales de vitesse en régime supercritique.

IV. 1 - Etude expérimentale en écoulement laminaire établi

Guidé par les résultats théoriques présentés au chapitre II dans le cas d'une électrode rectangulaire, nous avons effectué plusieurs séries d'expériences pour déterminer le rôle respectif des différentes grandeurs intervenant dans la loi de transfert au niveau d'une électrode circulaire.

IV.1.1. Loi de transfert en fonction du gradient

parietal de vitesse

A partir de la relation (I,4) qui détermine la vitesse $V(r)$ en un point de l'écoulement situé à la distance r de l'axe de symétrie, on peut déduire le gradient de vitesse S :

$$S = \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} = - \frac{2B}{r^2} \quad (\text{IV}, 1)$$

Sous cette forme on voit que si S n'est pas constant, il varie peu dans le cas où l'espace annulaire est petit devant le rayon des cylindres. Dans les conditions de notre montage, S varie de :

$$S_1 = \frac{R_1 \Omega_1}{d} \left(\frac{R_2^2}{R_0 R_1} \right) = \frac{R_1 \Omega_1}{d} \times 1,152 \quad (\text{IV}, 2)$$

au niveau du cylindre intérieur à :

$$S_2 = \frac{R_1 \Omega_1}{d} \left(\frac{R_1}{R_0} \right) = \frac{R_1 \Omega_1}{d} \times 0,952 \quad (\text{IV}, 3)$$

au niveau du cylindre extérieur, avec : $R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$

Dans la couche de diffusion située au voisinage de l'électrode, qui s'étend au plus à 0,5 mm de la paroi du cylindre extérieur dans le cas le plus défavorable (pour la plus petite vitesse réalisable : $S \approx 0,1 \text{ s}^{-1}$), on peut considérer que le gradient est constant et égal à S_2 à mieux que 1 % près. Par conséquent pour toutes les mesures qui ont été faites nous avons pris S_2 comme valeur de S .

Les courants limites ont été déterminés à partir des courants expérimentaux grâce aux paliers polarographiques préalablement tracés, selon la méthode décrite au chapitre III. Les résultats obtenus avec l'électrode de platine de surface $A = 0,765 \text{ mm}^2$ sont présentés dans le tableau A. Ils correspondent aux conditions expérimentales suivantes :

- concentration en Fe (CN) $6K_3$ respectivement :
 $0,456 \times 10^{-6}$; $1,15 \times 10^{-6}$; $1,50 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$
- concentration en soude : $0,2 \times 10^{-3} \text{ mole/cm}^3$
- température : 21° C ; viscosité cinématique : $1,04 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{s}$
coefficient de diffusion : $0,71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 / \text{s}$

____ TABLEAU A ____

Influence de la concentration et du gradient de vitesse sur le transfert

Electrode fixe : 0,765 mm² - Température 21°C

$$C_0 = 0,456 \times 10^{-6} \text{ mole / cm}^3$$

$S s^{-1}$	0	0,257	0,400	0,531	0,639	0,734	0,920	1,075	1,148	1,195	1,255
$T \mu A$	0,095	0,164	0,181	0,197	0,207	0,215	0,230	0,242	0,249	0,250	0,251
$K \cdot 10^{-3}$ cm/s	0,283	0,487	0,538	0,585	0,615	0,639	0,683	0,719	0,740	0,742	0,746
Kd_0/D	3,93	6,76	7,47	8,12	8,54	8,87	9,48	9,98	10,28	10,30	10,36
Sd_0^2/D	0	352	549	727	875	1005	1260	1472	1572	1636	1718

$$C_0 = 1,15 \times 10^{-6} \text{ mole / cm}^3$$

$S s^{-1}$	0	0,098	0,143	0,203	0,287	0,364	0,447	0,550	0,672	0,716	0,991	1,110
$I \mu A$	0,220	0,322	0,350	0,390	0,420	0,455	0,485	0,515	0,540	0,555	0,605	0,620
$K \cdot 10^{-3}$ cm/s	0,259	0,379	0,412	0,459	0,494	0,536	0,571	0,606	0,636	0,654	0,712	0,730
Kd_0/D	3,60	5,26	5,72	6,37	6,88	7,44	7,92	8,41	8,83	9,08	9,88	10,14
Sd_0^2/D	0	134	196	278	393	498	612	753	920	980	1357	1520

$$C_0 = 1,50 \times 10^{-6} \text{ mole / cm}^3$$

$S s^{-1}$	0	0,119	0,167	0,370	0,430	0,490	0,633	0,728	0,763	0,835	1,058	1,255
$I \mu A$	0,300	0,445	0,470	0,590	0,610	0,630	0,680	0,700	0,720	0,740	0,790	0,840
$K \cdot 10^{-3}$ cm/s	0,271	0,402	0,424	0,532	0,550	0,568	0,614	0,631	0,650	0,668	0,713	0,758
Kd_0/D	3,76	5,58	5,88	7,39	7,64	7,89	8,53	8,76	9,03	9,28	9,90	1053
Sd_0^2/D	0	163	229	507	589	671	867	997	1045	1163	1449	1718

TABLEAU B

Influence du diamètre de l'électrode sur le transfert

Electrode en Nickel: $d_o = 0,225 \text{ mm}$; Surface: $3,98 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$; $C_o = 1,13 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$; $T = 21^\circ \text{C}$.

S_s^{-1}	1,196	1,030	0,598	0,510	0,300	0,180	0,120
$I \mu\text{A}$	0,0680	0,0660	0,0592	0,0575	0,535	0,0510	0,0490
$S d_o^2 / D$	86,0	73,8	43,1	36,7	21,5	12,95	8,63
$K d_o / D$	4,97	4,83	4,33	4,21	3,92	3,73	3,59

Electrode en Nickel: $d_o = 0,41 \text{ mm}$; Surface: $13,2 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$; $C_o = 1,13 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$; $T = 21^\circ \text{C}$.

S_s^{-1}	1,196	1,020	0,900	0,598	0,360	0,240	0,119
$I \mu\text{A}$	0,157	0,153	0,145	0,136	0,121	0,113	0,104
$S d_o^2 / D$	284	241	213	144,6	85,2	56,8	28,2
$K d_o / D$	6,30	6,14	5,81	5,48	4,80	4,54	4,17

Electrodes mobiles en platine : $C_o = 1,44 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$; $T = 21^\circ \text{C}$

Electrode C_1 $d_o = 0,992 \text{ mm}$ $A = 0,777 \text{ mm}^2$	S_s^{-1}	0,16	0,27	0,38	0,57	0,79	0,89	1,00
	$I \mu\text{A}$	0,465	0,540	0,600	0,670	0,740	0,770	0,780
	$S d_o^2 / D$	222	374	527	790	1095	1233	1386
	$K d_o / D$	6,00	6,97	7,74	8,64	9,55	9,93	10,10
Electrode C_2 $d_o = 0,972 \text{ mm}$ $A = 0,712 \text{ mm}^2$	$I \mu\text{A}$	0,460	0,530	0,580	0,655	0,720	0,745	0,765
	$S d_o^2 / D$	213	359	506	759	1057	1185	1331
	$K d_o / D$	6,07	6,99	7,66	8,65	9,50	9,83	10,10
	$I \mu\text{A}$	0,455	0,505	0,560	0,615	0,670	0,705	0,740
Electrode C_3 $d_o = 0,952 \text{ mm}$ $A = 0,712 \text{ mm}^2$	$S d_o^2 / D$	204	345	506	727	1008	1136	1276
	$K d_o / D$	6,14	6,82	7,56	8,30	9,05	9,52	10,00

TABLEAU C

Influence de la température sur le transfert

Electrode mobile: surface 0,745mm² ; d₀ = 0,974 mm

T = 10,4° C ; C₀ = 1,45 × 10⁻⁶ mole/cm³

S s ⁻¹	1,00	1,13	1,32	1,64	1,76	1,82	1,25	0,725	0,520	1,05	1,10
I μA	0,608	0,628	0,656	0,695	0,705	0,720	0,643	0,552	0,500	0,612	0,622
Kd ₀ /D	10,75	11,13	11,63	12,33	12,50	12,77	11,41	9,80	8,87	10,85	11,03
Sd ₀ ² /D	1814	2061	2410	2990	3045	3332	2215	1318	928	1882	2060

T = 14,7° C ; C₀ = 1,48 × 10⁻⁶ mole/cm³ — T = 15,2 ° C ; C₀ = 0,76 × 10⁻⁶ mole/cm³

s ⁻¹	1,30	1,43	1,50	1,11	0,58	1,45	1,32	1,07	0,85	0,505
μA	0,73	0,755	0,775	0,705	0,59	0,39	0,375	0,357	0,34	0,29
d ₀ /D	11,05	11,41	11,71	10,67	8,93	11,43	11,28	10,43	9,98	8,54
d ₀ ²	2045	2270	2370	1759	930	2265	2065	1665	1330	7,82

T = 17,6° C ; C₀ = 0,636 × 10⁻⁶ mole/cm³

s ⁻¹	0,98	1,03	1,045	1,085	1,12	1,162	1,13	1,275	1,30	1,34	1,37
μA	0,305	0,308	0,310	0,315	0,314	0,318	0,322	0,325	0,330	0,331	0,333
d ₀ /D	10,00	10,10	10,18	10,34	10,32	10,44	10,59	10,66	10,83	10,85	10,93
d ₀ ² /D	982	1015	1060	1088	1125	1165	1232	1250	1308	1342	1370

TABLEAU C

(suite)

Influence de la température

Electrode mobile - surface $0,745\text{mm}^2$

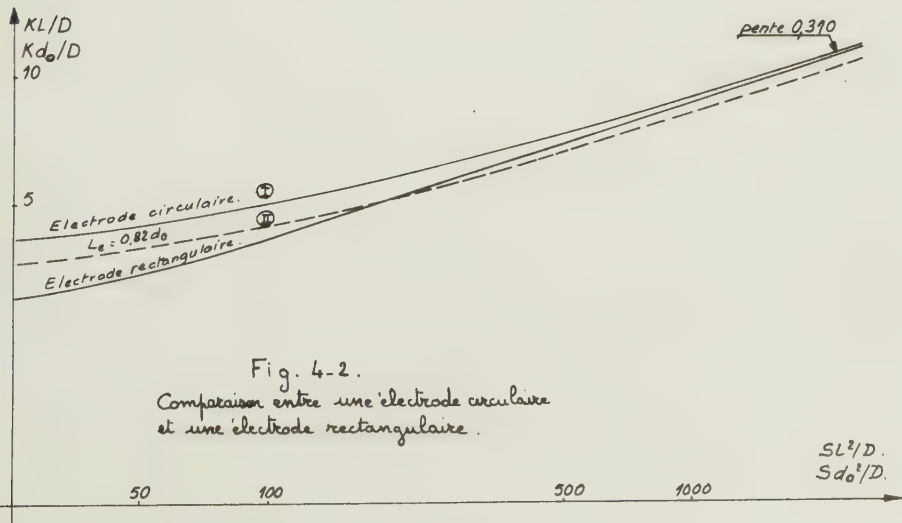
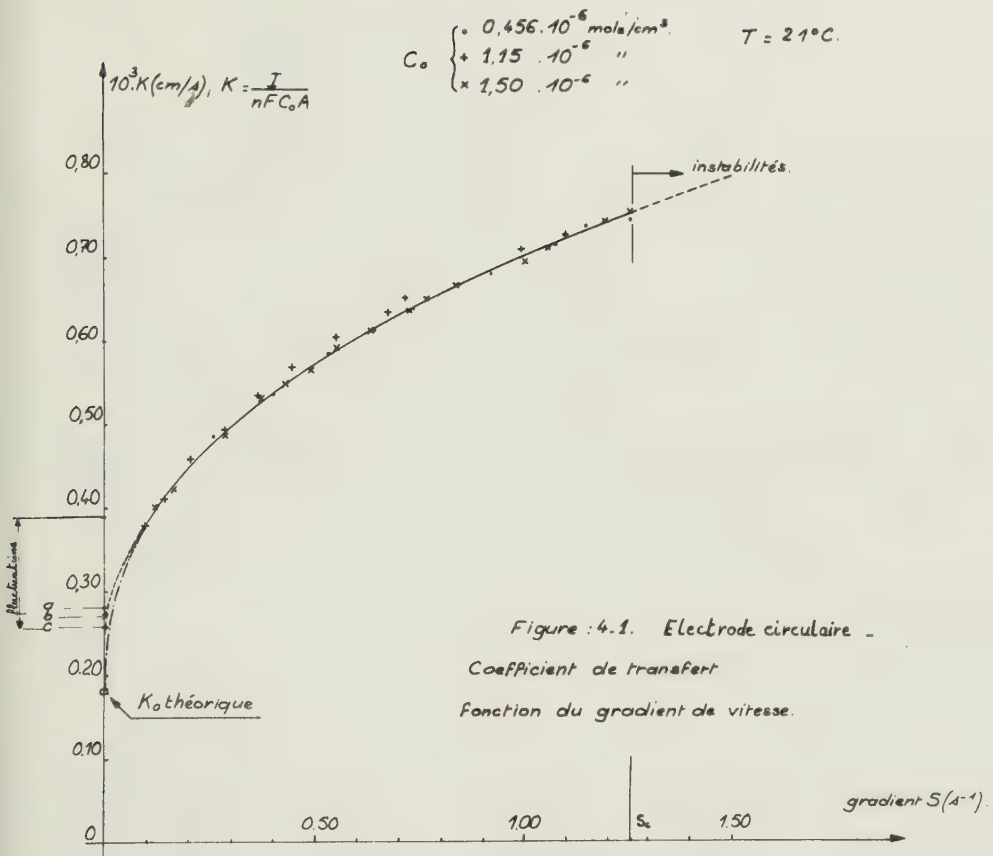
$T = 19,7^\circ \text{C}$; $C_0 = 1,475 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$

$S s^{-1}$	0,81	0,95	1,00	1,08	1,20	1,93	1,27	1,32
$I \mu A$	0,664	0,720	0,735	0,750	0,780	0,775	0,785	0,810
$D d_0/D$	8,86	9,60	9,82	10,01	10,42	10,34	10,48	10,80
$S d_0^2/D$	1130	1322	1389	1501	1689	1714	1764	1910

$T = 21^\circ \text{C}$ cf Tableau A

$T = 26,5^\circ \text{C}$; $C_0 = 0,711 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$

$S s^{-1}$	0,259	0,297	0,612	0,704	0,85	0,92	0,97	1,03	1,095
$I \mu A$	0,258	0,315	0,34	0,365	0,375	0,385	0,390	0,395	0,410
$K d_0/D$	5,95	7,25	7,82	8,42	8,65	8,88	8,99	9,22	9,45
$S d_0^2/D$	296	341	705	809	975	1058	1118	1184	1262



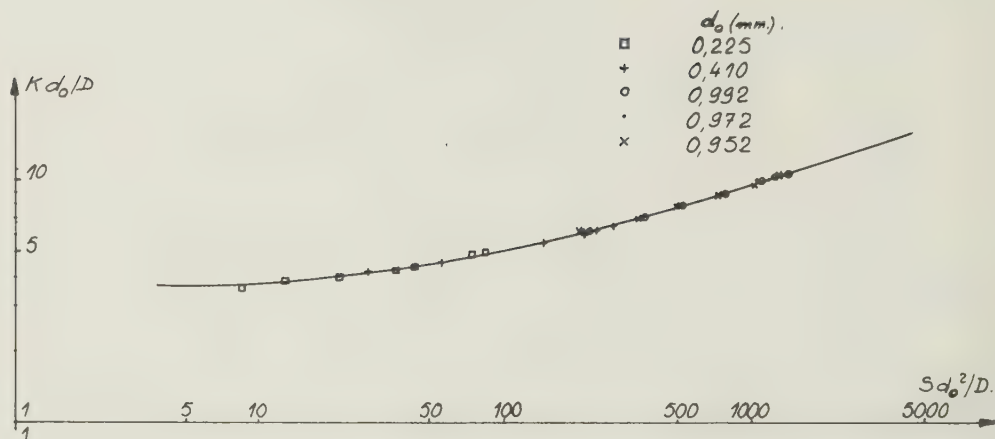


Figure 4.3.

Influence des dimensions de l'électrode sur le transfert.

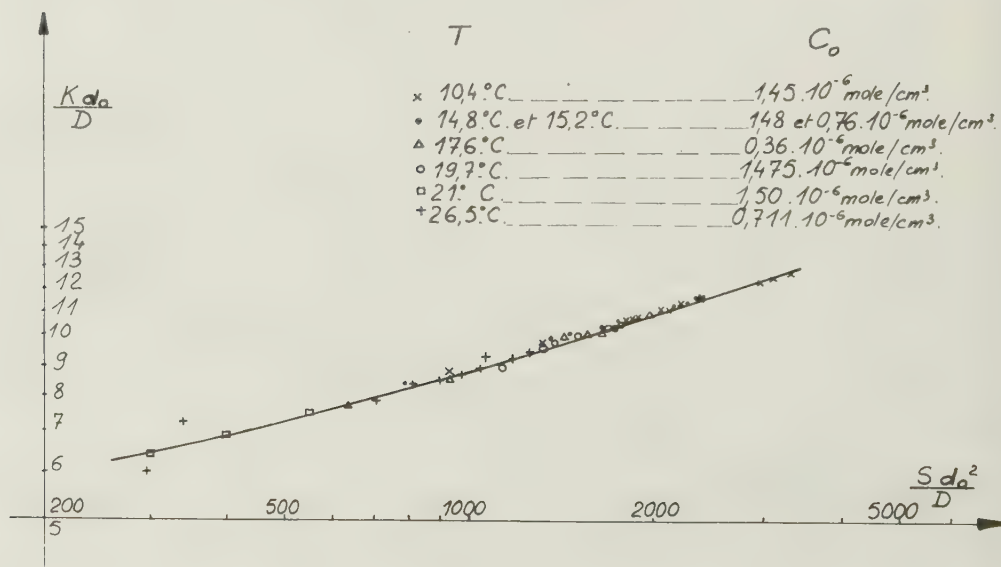


Figure 4.4.

Influence de la température sur le transfert

Les valeurs du coefficient de transfert : $K = \frac{I}{nF C_0 A}$ calculées dans chaque cas sont reportées sur la figure (4.1) en fonction du gradient de vitesse S . La courbe moyenne est limitée aux grandes valeurs de S par l'apparition des instabilités car au delà de la vitesse critique ($\Omega_c = 0,133 \text{ rd/s}$, $S_c = 1,26 \text{ s}^{-1}$) la relation (IV,3) n'est plus valable, et aux faibles valeurs de S ($S < 0,1 \text{ s}^{-1}$) pour lesquelles la présence de mouvements de convection libre comme nous le verrons dans le paragraphe 2, rend son tracé incertain. Pour $0,1 < S < S_c$ la dispersion des mesures est inférieure à 2 %, c'est-à-dire une meilleure précision que les $\pm 2,5 \%$ prévus compte tenu du fait qu'il faut retrancher l'erreur systématique commise sur la surface de l'électrode qui est la même dans tous les cas. On vérifie ainsi que le flux de matière est bien proportionnel à la concentration des ions actifs au sein de la solution.

La courbe est reproduite en coordonnées logarithmiques sur la figure (4.2) (courbe I) sous la forme adimensionnelle déjà utilisée : $Sh = Kd_0/D$ en fonction de Sd_0^2/D où le diamètre d_0 remplace la longueur L . Lorsque S croît la pente de la courbe, d'abord faible, tend progressivement vers une limite voisine de $1/3$ (0,310 à sa partie supérieure) mais moins rapidement que la courbe obtenue pour l'électrode rectangulaire ; ceci est conforme au fait que dans le domaine des faibles vitesses envisagées le terme de diffusion transversale à l'écoulement $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$, absent dans le cas d'une électrode infiniment longue selon Oz , reste relativement important pour une électrode circulaire. Lorsque la vitesse de l'écoulement est plus grande, ce terme a une moindre influence sur le flux total, ce qui explique que la loi en puissance $1/3$ du gradient apparaisse comme une loi limite pour les deux courbes.

IV.1.2. Equivalence entre une électrode circulaire et une électrode rectangulaire. Influence du diamètre.

Le comportement asymptotique commun des lois de transfert incite à établir une correspondance entre les deux types d'électrode. Tenant compte du fait que tous les filets de fluide n'ont pas le même temps de contact avec la surface active selon leur position par rapport au centre de l'électrode circulaire, REISS [60] trouve que celle-ci est équivalente à une électrode rectangulaire de largeur $L_e = 0,82 d_0$. Cette représenta-

tion ne convient pas parfaitement dans notre cas puisque la courbe de transfert obtenue en remplaçant d_0 par L_e également tracée sur la figure 4 - 2 (courbe II) tend vers une asymptote de 8 à 10 % inférieure à celle de la courbe obtenue pour l'électrode rectangulaire. L'écart peut avoir deux causes dont il est difficile de chiffrer l'importance relative :

- d'une part la relation de REISS constitue une loi limite s'appliquant mal dans le domaine de vitesse considéré puisque, pour l'établir, les effets de bord qui se traduisent dans l'équation de diffusion par la présence des termes $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ ont été négligés ; de ce fait le facteur numérique 0,82 est sans doute trop faible.

- d'autre part il est probable que la surface active de l'électrode n'est pas celle qui a été mesurée géométriquement. On ne peut à priori savoir dans quel sens intervient la microrugosité de l'électrode et le fait que celle-ci ne soit pas en parfaite continuité avec la paroi inerte du cylindre. Il se peut que dans le cas qui nous occupe, la surface active soit légèrement inférieure à la surface mesurée.

Devant la difficulté de définir un coefficient valable pour la comparaison avec les électrodes rectangulaires, nous avons préféré abandonner une telle recherche et conserver le diamètre comme dimension caractéristique des électrodes circulaires. Les résultats concernant les six électrodes utilisées sont présentés dans le tableau B et reportés sur la figure 4-3. Si pour les électrodes de platine nous avons constaté une bonne reproductibilité des mesures effectuées à plusieurs jours d'intervalle, les écarts étant au maximum de 2,5 % par rapport à la courbe moyenne de la figure 4-2, il n'en est pas de même pour les électrodes de nickel dont la surface active, en présence de la solution ou à l'air libre diminuait lentement avec le temps et devenait notablement différente de la surface géométrique. Par polissage mécanique et électrochimique, il est possible d'éliminer une grande partie de l'oxyde qui s'est formé, cependant il est douteux que l'on puisse revenir exactement au même état initial ainsi qu'en témoignent les variations de 5 à 10 % observées par HANRATTY d'une expérience à l'autre. Pour qu'une comparaison plus précise puisse s'établir entre les résultats nous avons défini dans chaque cas une surface "équivalente", représentant la portion de surface réellement active, qui permet d'ajuster les courbes obtenues avec les électrodes en nickel à la courbe

moyenne des électrodes en platine. C'est ainsi qu'ont été déterminés les surfaces et diamètres "équivalents" indiqués dans le tableau B. Le fait qu'à la précision des mesures près (3,5%) tous les points de la figure 4 - 3 puissent être représentés par une courbe unique justifie cette procédure.

IV.1.3. Influence du coefficient de diffusion

Dans une dernière série de mesures nous avons étudié l'influence du coefficient de diffusion sur le transfert de matière. Utilisant toujours le même ion (Ferrycyanure) et pratiquement la même solution (eau + Na OH N/5), nous avons joué sur la température pour modifier les conditions de diffusion. Une variation de la température a deux conséquences elle entraîne un changement non seulement dans l'énergie cinétique de l'ion mais également dans la résistance du milieu à son déplacement (viscosité). Les deux effets vont dans le même sens mais le second est de beaucoup le plus important (variation de 2 % environ par degré). Les expériences ont été effectuées à des températures comprises entre 10,4° C et 26,5° C. Ainsi le coefficient de diffusion (déterminé à partir de la courbe de la figure 3-6) a varié entre $0,51 \times 10^{-5}$ et $0,82 \times 10^{-5}$ cm²/s. Les résultats obtenus avec l'électrode C₂, reproduits sous forme adimensionnelle dans le tableau C, sont présentés sur la figure 4-4. La dispersion des valeurs autour de la courbe moyenne est inférieure à 2 % sauf pour la température la plus élevée (26,5° C) pour laquelle il y a, aux faibles vitesses, des écarts plus importants sans doute dus au phénomène de convection naturelle comme nous le verrons dans le prochain paragraphe.

IV.1.4. Discussion

L'étude expérimentale qui a été faite présente un intérêt tant sur le plan théorique que pratique. Elle nous a permis de montrer qu'en raison de la faible épaisseur de la couche de diffusion lorsque le liquide est en mouvement, le comportement d'une électrode circulaire est comparable à celui d'une électrode rectangulaire et s'en rapproche d'autant plus que la vitesse de l'écoulement est plus grande. Ainsi le flux de matière adimensionnel $Sh = \frac{K d_0}{D}$ tend à croître selon la puissance 1/3 du gradient de vitesse adimensionnel : Sd_0^2 / D .

A l'inverse la connaissance du flux de matière permet

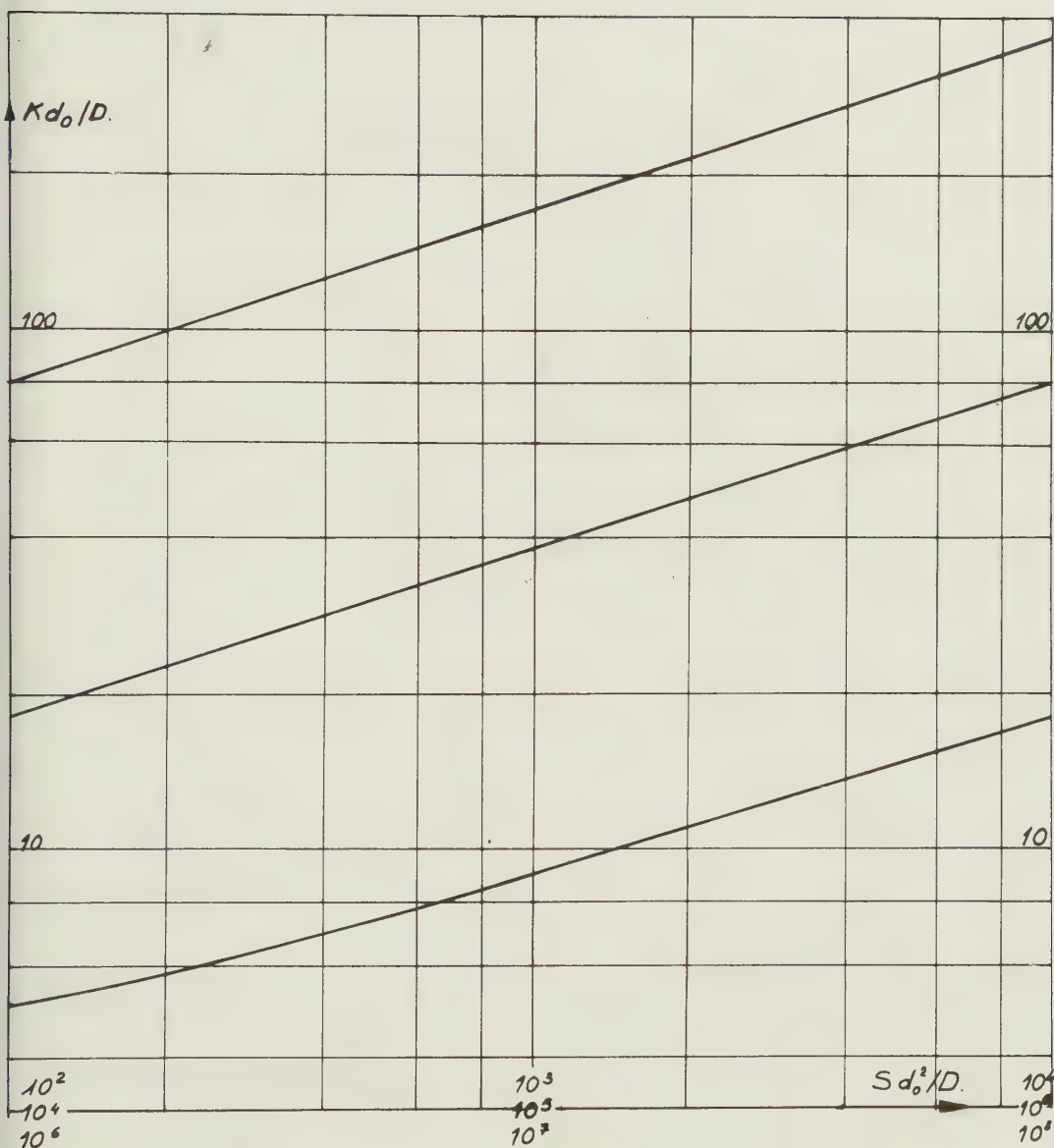
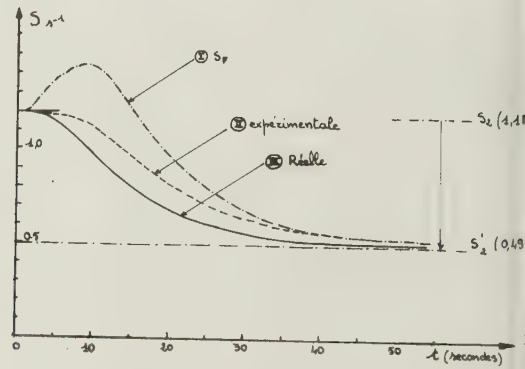
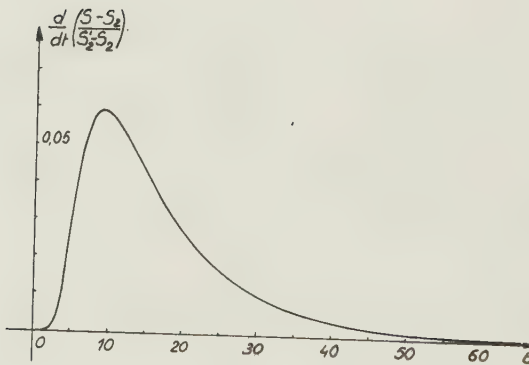
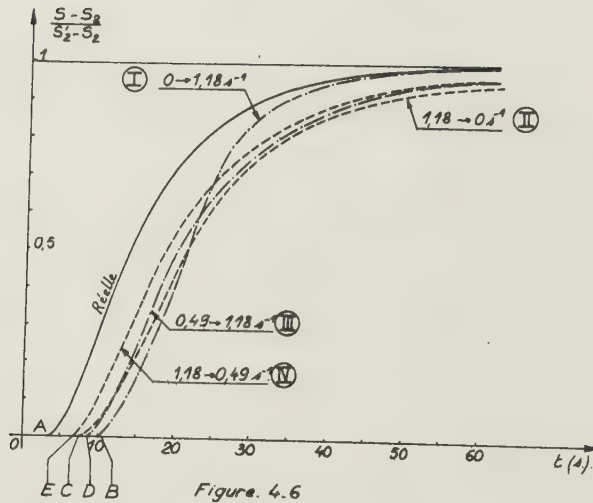


Fig. 4.5.

Courbe d'étalonnage du transfert.



ont été effectuées de la manière suivante : le cylindre intérieur est mis en rotation à la vitesse la plus faible où les résultats sont encore reproductibles, puis l'on supprime l'entraînement ; le courant décroît tout d'abord jusqu'à une valeur qui reste stable une à deux minutes au plus. Les valeurs ainsi obtenues sont repérées par les points a, b, c de la figure 4-1. Ensuite le courant croît à nouveau et fluctue autour d'une valeur moyenne de 20 à 30 % supérieure à la première. Ces variations sont manifestement dues à l'existence de mouvements de convection naturelle au voisinage de l'électrode qui sont considérablement réduits lorsque l'écoulement est forcé par la mise en rotation du cylindre. La convection naturelle se développe à partir des variations de densité existant au sein du fluide et dues à une répartition non uniforme de la concentration et éventuellement de la température. Évaluons l'importance relative de ces deux facteurs dans les conditions expérimentales de la figure 4.1.

1. Dans le cas où la cellule est parfaitement isotherme, la convection provient uniquement du gradient de concentration en Ferricyanure de potassium dans la région voisine de l'électrode. Deux effets se superposent :

- d'une part la réduction s'accompagne d'un changement de densité : à concentration égale une solution de Ferrocyanure de potassium est plus dense qu'une solution de Ferricyanure puisque dans le premier cas il y a un ion potassium de plus par mole (en fait il s'agit sans doute d'un ion sodium qui est en gros excès dans la solution). Le liquide doit donc être plus dense au voisinage de l'électrode qu'au sein de la solution.

- d'autre part le coefficient de diffusion de l'ion $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ est plus faible que celui de l'ion $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ — $D_{\text{Ferro}} = 0,60 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ et $D_{\text{Ferri}} = 0,71 \text{ cm}^2/\text{s}$ [49] — ce qui va dans le même sens que l'effet précédent puisque le ferrocyanure diffuse moins vite de l'électrode que le ferricyanure n'y arrive.

La convection naturelle apparaît lorsque les surfaces d'égale densité ne sont pas confondues avec les surfaces d'égale pression. La géométrie de l'électrode ainsi que sa disposition par rapport à la solution ont de ce fait une grande importance dans l'apparition et le développement du phénomène. LAITINEN et KOLTOFF [61] ont montré en utilisant plusieurs dispositifs que l'on peut contrôler le processus en disposant au

voisinage de l'électrode un gel qui, en augmentant localement la viscosité a pour effet de contrarier l'établissement des courants de convection et de rapprocher le transfert de matière de sa valeur théorique en diffusion pure. LEVICH [62] a fait un calcul dans le cas particulier où la substance active de concentration C_0 au sein de la solution est absorbée à la surface d'une électrode verticale (dépôt électrochimique d'un métal dans l'hypothèse où l'état de surface de l'électrode n'est pas modifié). Il suppose que la couche limite hydrodynamique a même épaisseur que la couche limite de concentration et néglige le terme de diffusion $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ parallèle à l'électrode. Dans ces conditions il montre que la composante de vitesse verticale V'_z en un point (y, z) est définie par :

$$V'_z = 4 \sqrt{\left(\frac{g\alpha'}{4\nu^2} \right)^{3/4} \cdot \frac{0,48}{Sc^{1/4}} \cdot z^{1/4} \cdot y} \quad (IV,4)$$

z étant la distance à partir du bord inférieur de l'électrode, y la distance perpendiculaire à celle-ci, supposée suffisamment petite pour que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur ; g l'accélération de la pesanteur, Sc le nombre de Schmidt = $\frac{\nu}{D}$ et $\alpha' = \frac{C_0}{\rho(C_0)} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{C=C_0}$ où $\rho(C)$

représente la densité au point de concentration C .

D'après la relation (IV,4), la convection naturelle est d'autant plus importante que la substance est en forte concentration et que la viscosité est faible (aux températures élevées par exemple).

On peut reprendre le calcul de LEVICH, dans le cas qui nous occupe, la seule différence concerne l'évaluation de α' . En supposant que les couches de diffusion des ions Ferri et Ferrocyanure ont sensiblement la même épaisseur [59], on trouve * :

$$\alpha' = \frac{C_0 M_{\text{Ferri}}}{\rho(C_0)} \left(\frac{M_{\text{Ferro}}}{M_{\text{Ferri}}} \cdot \frac{D_{\text{Ferri}}}{D_{\text{Ferro}}} - 1 \right)$$

Pour une électrode de hauteur H , on peut définir un gradient moyen de vitesse

$$\bar{S}' = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{dV'_z}{dy} \cdot dz$$

* Pour l'évolution de α' : M_{Ferro} (352 g) a été calculée en supposant que l'ion Ferrocyanure était entouré de 3 atomes de Potassium et 1 atome de Sodium.

dans le cas d'une électrode circulaire, nous prendrons d_0 comme valeur de H ($d_0 = 0,986$ mm).

D'après (IV,4), on obtient tout calcul fait :

$\bar{S}' = 4,31 \cdot 10^3 C_0^{1/4} \cdot d_0^{1/4}$, ce qui donne pour les concentrations rapportées sur la figure 4-1 respectivement : $0,041 \text{ s}^{-1}$, $0,085 \text{ s}^{-1}$, et $0,103 \text{ s}^{-1}$. Ces valeurs sont inférieures ou égales aux gradients les plus faibles réalisables expérimentalement ($\approx 0,1 \text{ s}^{-1}$).

2. On peut, à l'inverse, envisager le phénomène comme ayant une origine purement thermique. Même en supposant une répartition uniforme de la température dans la masse du liquide, obtenue par un fort brassage préalable, il peut apparaître de la convection au voisinage de la paroi s'il existe un écart de température ΔT entre celle-ci et la solution. La composante verticale de vitesse V_z'' est alors donnée par une relation analogue à (IV,4) (SCHLICHTING [63]), le nombre de Schmidt étant remplacé par le nombre de Prandtl : Pr et α' par $\alpha'' = \frac{\partial \rho}{\partial T} \times \frac{\Delta T}{\rho}$ (pour la solution $Pr \approx 7$ et $\frac{\partial \rho}{\partial T} \approx 2,07 \times 10^{-4} \text{ g/(cm}^3 \times \text{d}^\circ)$).

Dans ce cas, la convection se développe sur la totalité de la hauteur du cylindre et non sur la seule électrode comme précédemment. On peut définir de la même façon un gradient de vitesse moyen $\bar{S}''$ au-dessus de l'électrode située à la distance H de la base du cylindre ($H = 7$ cm).

Le rapport $\frac{\bar{S}''}{\bar{S}'}$ détermine l'importance relative des mouvements liés à ces deux types de convection naturelle ; il s'écrit :

$$\frac{\bar{S}''}{\bar{S}'} = \left(\frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^{3/4} \cdot \left(\frac{S_c}{Pr} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{H}{d_0} \right)^{1/4} = \left(\frac{\Delta T}{C_0} \right)^{3/4} \cdot 6,1 \cdot 10^{-4} \quad (\text{IV,6})$$

Pour $\Delta T = 0,05^\circ \text{ C}$ (précision du thermostat) et $C_0 = 1,5 \times 10^{-6} \text{ mole / cm}^3$, on obtient $S'' = 1,5 \bar{S}' = 0,154 \text{ s}^{-1}$. Dans cet exemple, il apparaît que l'influence de la température est légèrement plus importante que celle de la concentration. En pratique les deux phénomènes sont concomittants : si la température de thermostatation est notablement différente de la température ambiante, ΔT peut être de l'ordre $1/10^\circ \text{ C}$;

d'après (IV,6), le transfert est dû essentiellement à la convection thermique d'autant plus qu'il peut se développer, surtout pour les températures élevées, des mouvements au sein même du fluide, du fait de la difficulté dans ce cas d'avoir une température très homogène dans toute la cellule.

Si au contraire, les deux températures sont très voisines, ΔT est faible ($< 0.05^\circ \text{C}$) et de ce fait $\bar{S}''$ et $\bar{S}'$ sont peut différents. Les deux modes de convection tendent à conjuguer ou à compenser leurs effets selon le signe de ΔT . Les résultats de la figure 4 - 1 illustrant le second cas, l'interprétation du phénomène décrit précédemment peut être la suivante : lorsqu'on arrête la rotation du cylindre, la zone de diffusion s'agrandit autour de l'électrode et le courant décroît vers la valeur théorique de diffusion pure ; en l'absence de convection forcée, la convection naturelle peut se développer plus facilement ; elle vient progressivement équilibrer le premier effet, ce qui a pour conséquence de stabiliser le courant, tout au moins pendant un certain temps. Si le développement de la convection se poursuit, le courant croît à nouveau. Du fait de la sensibilité du mouvement au moindre écart de température ΔT , qui ne peut être maintenu rigoureusement constant, il ne peut s'établir un régime stable, ce qui explique les fluctuations qui sont ensuite enregistrées.

En présence d'un faible écoulement, la convection naturelle subsiste, mais se trouve perturbée par la convection forcée. Sur la figure 4 - 1, la différence d'ordonnées au voisinage de l'origine entre la courbe en pointillé (interpolation de la courbe réelle) et la courbe en traits mixtes (fictive) peut de cette façon être attribuée à la convection naturelle. Dans le cas d'une forte concentration et d'une température élevée, elle peut être suffisamment importante pour contribuer de façon non négligeable au transfert qui se trouve de ce fait accru. C'est ce que nous avons constaté à la température de $26,5^\circ \text{C}$ pour les faibles vitesses de rotation du cylindre (fig 4 - 4).

Ainsi se trouvent expliqués, au moins qualitativement les phénomènes observés dans le cas où l'entraînement du liquide est nul ou très lent. Nous n'avons pas entrepris d'étude plus approfondie sur le sujet, jugeant un tel travail quelque peu en dehors du cadre que nous nous

étions fixé. Nous avons simplement voulu mettre en évidence le caractère "idéal" du transfert par diffusion pure puisqu'il est pratiquement impossible d'éviter qu'il ne se produise en même temps des mouvements de convection.

IV.3 - Transfert de matière en régime de vitesse variable.

Un changement dans le champ des vitesses entraîne une modification du champ des concentrations ; cependant du fait de la lenteur des processus de transfert de matière par rapport au transfert de quantité de mouvement, une variation rapide de la vitesse de l'écoulement ne peut-être suivie instantanément de la variation correspondante du flux de matière. On doit donc enregistrer un certain retard ; c'est celui-ci que nous avons cherché à déterminer dans un cas particulier d'écoulement propre à notre montage.

IV.3.1 - Etude théorique ; temps de réponse.

La solution de l'équation du bilan de matière :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S_y \frac{\partial C}{\partial x} = D \Delta C \quad (\text{IV} , 7)$$

en régime non établi peut être obtenue dans le cas d'une électrode rectangulaire moyennant d'importantes hypothèses simplificatrices. En négligeant $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ et en supposant $\frac{\partial C}{\partial t}$ petit devant $S_y \frac{\partial C}{\partial x}$ on montre facilement [51] en intégrant (IV,8) par rapport à y (0 → ∞) puis par rapport à x (0 → L) que le coefficient de transfert s'écrit :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S}{L} \right)^{1/3} - 0,263 (DL)^{1/3} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{IV} , 8)$$

soit en prenant $L = d_o$ pour une électrode circulaire :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S}{d_o} \right)^{1/3} - 0,263 (D d_o)^{1/3} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{IV}, 9)$$

Le premier terme représente le transfert en régime permanent (déjà obtenu) et le second l'écart introduit lorsque la vitesse de l'écoulement varie. Le retard est d'autant plus important que la vitesse est lente (faibles valeurs de S) ou que le changement de vitesse s'effectue rapidement (grandes valeurs

de $\frac{\partial S}{\partial t}$). On voit également l'intérêt d'utiliser des électrodes de petit diamètre pour diminuer le temps de réponse. Appelons S_F le gradient fictif qui correspondrait en régime permanent au transfert K défini par (IV,9) :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S_F}{d_o} \right)^{1/3}, \text{ on a :}$$

$$S_F^{1/3} = S^{1/3} - 0,263 \left(\frac{d_o^2}{D} \right)^{1/3} \cdot \frac{1}{S^{4/3}} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{IV},10)$$

Cette relation met en évidence l'erreur théorique que l'on commet lorsque l'on cherche à déterminer un gradient de vitesse variable à l'aide de la loi de transfert établie en régime permanent.

Dans le cas particulier où le gradient de vitesse est soumis à de petites fluctuations s autour d'une valeur moyenne $\bar{S}$, la relation (IV,9) peut s'écrire [51] :

$$\frac{3k}{K} = \frac{s}{\bar{S}} - \bar{\tau} \frac{\partial s / \bar{S}}{\partial t} \quad (\text{IV},11)$$

où k représente le terme fluctuant à partir du coefficient de transfert moyen $\bar{K}$ et $\bar{\tau}$ la constante de temps du phénomène définie par $\bar{\tau} = 0,911 \left(\frac{d_o^2}{D S^2} \right)^{1/3}$ pour $d_o = 1 \text{ mm}$, $D = 0,71 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $\bar{S} = 1,2 \text{ s}^{-1}$ (valeur proche de la valeur critique). On obtient $\bar{\tau} = 9,5 \text{ s}$, ce qui signifie que seules les fluctuations très lentes peuvent être enregistrées sans déformation notable dans ce cas. Supposons une fluctuation s d'amplitude a et de pulsation ω , (IV,11) devient :

$$\frac{3k}{K} = \frac{a \cos \omega t}{\bar{S}} + \bar{\tau} \frac{a \omega \sin \omega t}{\bar{S}} \quad (\text{IV},12)$$

Soit :

$$\frac{3k}{K} = \frac{a'}{\bar{S}} \cos (\omega t - \varphi) \text{ avec } a' = a \sqrt{1 + \bar{\tau}^2 \omega^2} \text{ et } \text{tg } \varphi = \bar{\tau} \omega \quad (\text{IV},13)$$

- a' représente l'amplitude détectée ; elle diffère d'autant plus de la valeur réelle a que le temps de réponse est important devant la période $\frac{2\pi}{\omega}$ de la fluctuation.

- φ représente le déphasage ; si la fluctuation possède une seule fréquence il n'est pas gênant car l'origine des phases n'a pas d'importance dans ce cas.

Pour $\omega = \frac{2\pi}{100}$ qui, comme nous le verrons, correspond sensiblement à la pulsation des instabilités au voisinage de la vitesse critique, l'écart est de 16 % entre a' et a , et $\varphi \approx \pi/5$.

IV.3.2. Etude expérimentale.

IV.3.2.1. Régime hydrodynamique transitoire dû à la variation brusque de la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

La vitesse circonférentielle V_1 du cylindre intérieur est portée instantanément à la valeur V'_1 ; voyons comment le profil de vitesse dans l'espace annulaire évolue de l'état initial $V_1(r)$ déterminé par V_1 à l'état final $V'_1(r)$ déterminé uniquement par V'_1 .

Du fait de la symétrie de révolution, l'équation du mouvement se réduit à :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{IV},14)$$

avec les conditions suivantes sur $V(r, t)$:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 : V(r, 0) = V_1(r, 0) \\ t > 0 : V(R_1, t) = V'_1 \\ V(R_2, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{IV},15)$$

Pour résoudre l'équation (IV,14) avec les conditions (IV,15) nous avons utilisé la méthode par transformation de LAPLACE appliquée à la variable t (LUCIUS [64]). Le calcul est décrit en Annexe II.

On obtient :

$$V(r, t) = (V'_1 - V_1) \left[\frac{R_1}{r} \cdot \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu \alpha_n^2 t} \cdot \frac{A(r)}{\alpha_n (A_1 - A_2)} \right] + V_1(r) \quad (\text{IV},16)$$

où :

$$A(x) = J_1(\alpha_n x) \cdot Y_1(\alpha_n R_2) - J_1(\alpha_n R_2) \cdot Y_1(\alpha_n x)$$

$$A_1 = R_1 [J_1(\alpha_n R_2) \cdot Y_2(\alpha_n R_1) - J_2(\alpha_n R_1) \cdot Y_1(\alpha_n R_2)]$$

$$A_2 = R_2 [J_1(\alpha_n R_1) \cdot Y_2(\alpha_n R_2) - J_2(\alpha_n R_2) \cdot Y_1(\alpha_n R_1)]$$

J_1 et J_2 , Y_1 et Y_2 étant les fonctions de Bessel d'ordre 1 et 2 respectivement de première et seconde espèce, et α_n la $n^{\text{ième}}$ racine de l'équation en α :

$$J_1(\alpha R_1) \cdot Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) \cdot Y_1(\alpha R_1) = 0 \quad (\text{IV}, 17)$$

Le gradient $S(R_2, t)$ au niveau du cylindre extérieur s'en déduit :

$$\begin{aligned} S(R_2, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) - \frac{1}{x} V(x, t) \right]_{x=R_2} \\ &= (S'_2 - S_2) \left[1 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu \alpha_n^2 t} \cdot \frac{B_2}{A_1 - A_2} \right] + S_2 \quad (\text{IV}, 18) \end{aligned}$$

$$\text{où : } B_2 = J_1(\alpha R_2) \cdot Y_2(\alpha_n R_2) - J_2(\alpha_n R_2) \cdot Y_1(\alpha_n R_2)$$

S_2 et S'_2 étant respectivement l'ancienne et la nouvelle valeur du gradient.

A partir de (IV, 14) on détermine la vitesse de variation du gradient en fonction du temps.

$$\frac{dS(R_2, t)}{dt} = (S'_2 - S_2) \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \nu \alpha_n^2 \cdot \frac{B_2}{A_1 - A_2} e^{-\nu \alpha_n^2 t} \right] \quad (\text{IV}, 19)$$

Ainsi le régime hydrodynamique transitoire est entièrement connu. Les figures 4-6 (courbe "réelle") et 4-7 rapportent les variations du gradient (IV, 18) et de sa dérivée (IV, 19) en fonction du temps pour $\nu = 1,04 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ après une évolution très lente à partir de S_2 , pendant 4 s environ, $S(R_2, t)$ varie ensuite rapidement (le maximum de la courbe $\frac{dS(R_2, t)}{dt}$ se situant

$\frac{dS(R_2, t)}{dt}$

vers 9 s), puis tend asymptotiquement vers la nouvelle valeur S'_2 .

IV.3.2.2. Expériences et résultats.

En pratique, la variation instantanée de la vitesse de rotation du cylindre n'est pas réalisable ; nous déplaçons très rapidement le curseur fixant la tension d'alimentation du moteur, d'une première position P à une seconde P' ; mais à cause de l'inertie mécanique du système d'entraînement (moteur, réducteur, courroie...) le passage d'une vitesse à l'autre s'effectue sur un certain laps de temps évalué au maximum à 1 s ; cette valeur étant relativement faible par rapport à la durée d'établissement du régime hydrodynamique, nous avons supposé que les relations établies ci-dessus restaient valables.

Pour chaque régime transitoire étudié, défini par les valeurs initiale et finale S_2 et S'_2 du gradient, la variation du courant enregistrée à la suite du changement de vitesse est traduite en variation du gradient au moyen de la courbe d'étalonnage de la figure 4-5. La comparaison avec la courbe réelle permet de connaître l'erreur que l'on commet en utilisant la loi de transfert obtenue en régime permanent pour la mesure de vitesses variables.

Les courbes I, III de la figure 4-6 ont été obtenues dans le cas d'un accroissement de la vitesse, le gradient passant respectivement de 0 à $1,18 \text{ s}^{-1}$ et de $0,49$ à $1,18 \text{ s}^{-1}$; les courbes II, IV correspondent aux variations inverses. Elles ont toutes à peu près la même allure que la courbe théorique mais se trouvent plus ou moins décalées par rapport à celle-ci montrant ainsi que les variations du transfert de matière ne suivent qu'avec un certain retard les variations de la vitesse au voisinage de l'électrode. En étudiant leur position relative on peut obtenir plusieurs indications sur les facteurs qui influencent ce retard.

(a)-La comparaison de I et II, III et IV montre que pour une même variation du gradient de vitesse le retard à l'origine (défini comme la différence d'abscisse entre le point A à partir duquel la courbe théorique se distingue de l'axe des temps et les points correspondant B, C, D, E sur les courbes expérimentales) est plus important lorsque la vitesse initiale est plus faible: $AB = 7 \text{ s}$ et $AC = 4,5 \text{ s}$; $AD = 5 \text{ s}$ et $AE = 3,5 \text{ s}$.

(b)- la comparaison de II et IV, correspondant au même mouvement initial ($S = 1,18 \text{ s}^{-1}$) montre que le retard à l'origine est plus important dans le cas où la variation de la vitesse est la plus grande : $AC = 4,5 \text{ s}$ et $AE = 3,5 \text{ s}$.

(c)- d'après I le retard tend à décroître à partir de sa valeur initiale lorsque la vitesse augmente rapidement et d'après II il tend à croître dans le cas d'une diminution rapide.

Ces résultats, qualitatifs, vont dans le sens prévu par HANRATTY. La figure 4-8 permet d'établir une comparaison plus précise pour Ω_1 variant de $1,18 \text{ s}^{-1}$ à $0,49 \text{ s}^{-1}$. La courbe (I) correspond à S_F , gradient donné par la relation (IV,9), (II) représente la courbe expérimentale et (III) la courbe de variation réelle de S . On voit que lorsque S varie rapidement, (I) s'écarte beaucoup de (II) ; elle tend au contraire à la rejoindre dans le cas inverse. Cette différence tient sans doute aux approximations faites pour établir (IV,9). En pratique, on peut utiliser cette relation pour connaître l'ordre de grandeur du temps de réponse, sachant que celui-ci est en fait plus faible que ne l'indique (IV,9). Dans le cas particulier du régime transitoire, les variations de vitesse sont suffisamment lentes pour que le retard soit considéré comme négligeable.

CHAPITRE V

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT DE COUETTE EN RÉGIME SUPERCRITIQUE

Les résultats obtenus par la méthode polarographique en régime laminaire subcritique confirmant les prévisions théoriques, nous avons pu aborder l'étude du régime transitoire d'écoulement consécutif à l'apparition des instabilités. Dans ce chapitre, nous montrons d'abord comment il est possible de détecter à partir de l'enregistrement du courant limite les divers types de perturbations du mouvement. En explorant le long d'une génératrice, nous déterminons à chaque vitesse la valeur moyenne de ce courant pour toute la surface du cylindre extérieur. Cette valeur traduite en gradient pariétal de vitesse nous permet de connaître le coefficient de frottement moyen. Les résultats sont comparés à des mesures de couples obtenues par divers auteurs pour des géométries d'écoulement voisines de celle de notre montage. Nous étudions également le développement de l'amplitude de la perturbation, que nous confrontons à celui prévu dans le cadre de la théorie non linéaire dont le domaine de validité se trouve ainsi délimité.

Nous nous attachons enfin à présenter le problème de la multiplicité des états qui peuvent être observés en essayant de dégager certaines caractéristiques de l'évolution du mouvement entre le régime instable mais encore parfaitement laminaire et le régime de turbulence complètement établi.

V.1 - Apparition du premier type d'instabilité

V.1.1. Détermination de la vitesse critique. Résultats expérimentaux

Lorsqu'on augmente progressivement la vitesse Ω_1 à partir du régime laminaire subcritique, pour une certaine valeur $\Omega_1 = \Omega_c$ ($\approx 0,133$ rd/s pour $\nu = 1,04 \times 10^{-2}$ cm²/s soit $Re_c = 128$), on voit apparaître des oscillations dans l'enregistrement du courant limite de période sensiblement double de la période de rotation du cylindre intérieur comme le montrera la figure 3-a. Ceci indique qu'au niveau de la surface de l'électrode, le gradient de vitesse n'est plus constant, mais varie périodiquement dans le temps. Si l'on dépasse légèrement la vitesse Ω_c , l'amplitude des oscillations croît rapidement ; elle s'annule si au contraire on diminue la vitesse. L'existence de ces oscillations est le signe que le mouvement est devenu instable. Une autre preuve de la modification de l'écoulement est apportée par le fait que le courant moyen (moyenne des oscillations) ne suit plus la loi de régime laminaire stable, mais croît plus vite en fonction de Ω_1 .

On dispose ainsi de quatre méthodes pour déterminer la vitesse critique à laquelle apparaissent les instabilités :

1 - Au cours d'un essai préalable, on situe approximativement le domaine de vitesse auquel appartient Ω_c ; on établit ensuite Ω_1 à une valeur légèrement en-dessous de ce domaine, puis on l'augmente régulièrement de 1 % en 1 %. A chaque vitesse, il faut attendre un certain temps pour s'assurer que le mouvement n'est pas instable, car d'après la théorie linéaire au voisinage de la stabilité "marginale", la vitesse de croissance d'une perturbation est très faible et infiniment lente pour $\Omega_1 = \Omega_c$. On note la vitesse pour laquelle apparaissent les oscillations et la valeur critique est prise comme moyenne entre cette vitesse et la précédente.

2 - On peut de la même manière diminuer la vitesse à partir d'une valeur supercritique et noter la disparition des oscillations.

Ces deux méthodes sont en général utilisées simultanément, les valeurs critiques ainsi obtenues peuvent différer de 3 à 4 % ; on prend alors la moyenne.

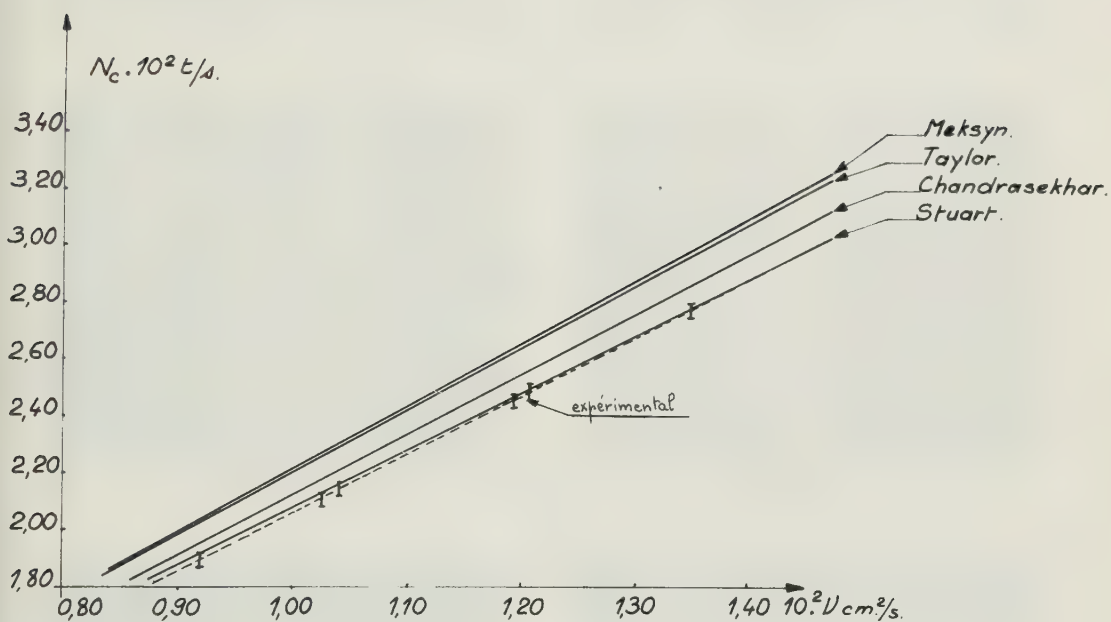


Figure 5_1 . Vitesse critique Fonction de la viscosité.

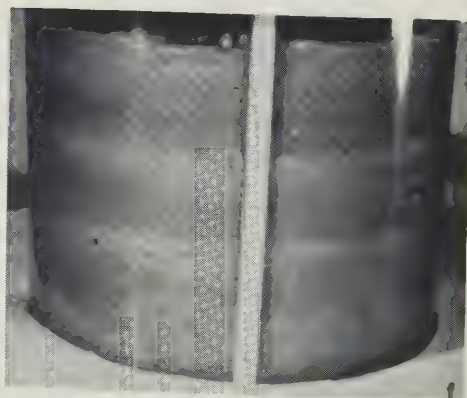
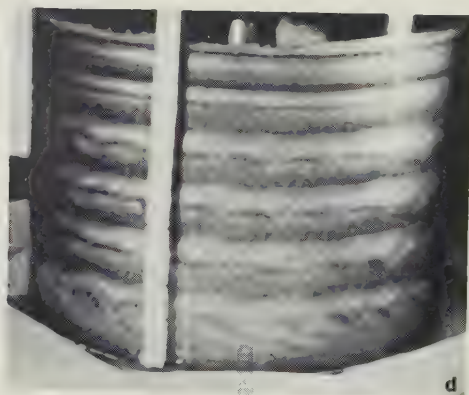
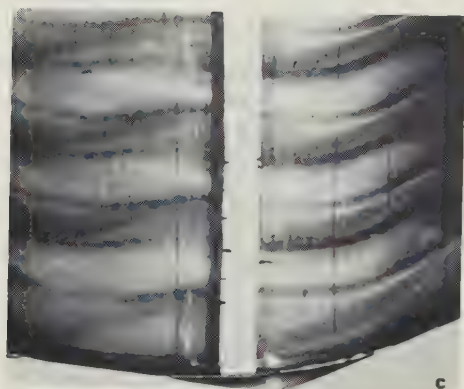
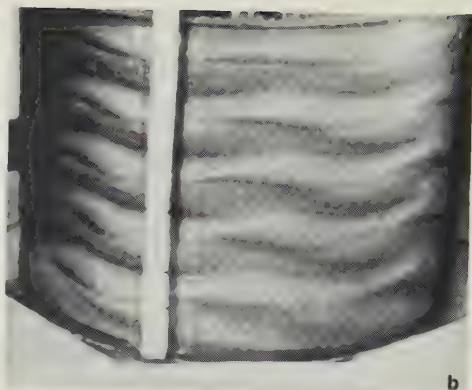
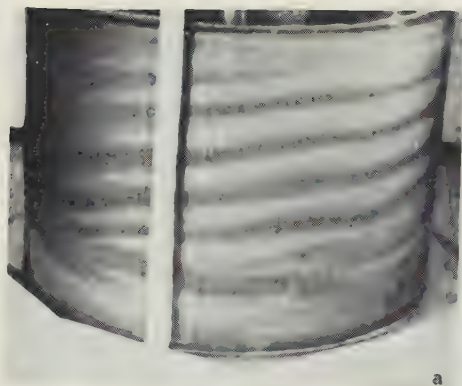


Figure 5 - 2

(a) $Re = 157$; état 14/D (spirale) - (b) $Re = 339$; état : 9/6 -
 (c) $Re = 739$; état 8/7 - (d) $Re = 1046$ apparition de 2 nouvelles cellules -
 (e) $Re = 2510$: 11 cellules - (f) $Re = 43900$ périodicité axiale résiduelle -

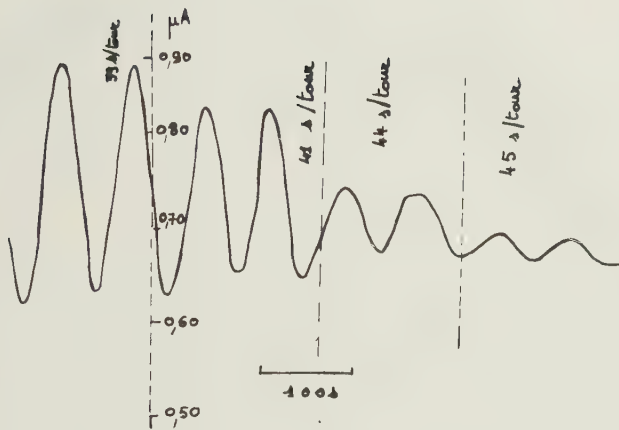


Fig 5-3a: Apparition de la 1^{ère} instabilité.

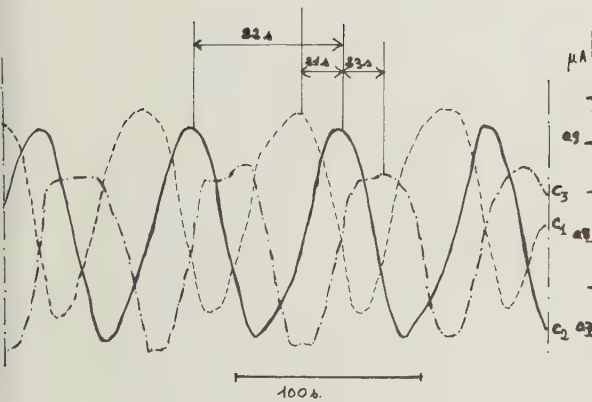


Fig. 5-3 b: 1^{ère} instabilité; déphasage entre les électrodes.

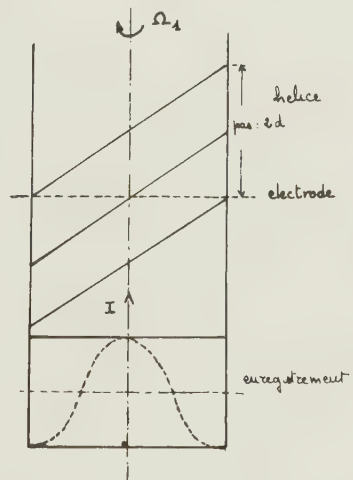


Fig 5-3 c: 1^{ère} instabilité; forme des oscillations.

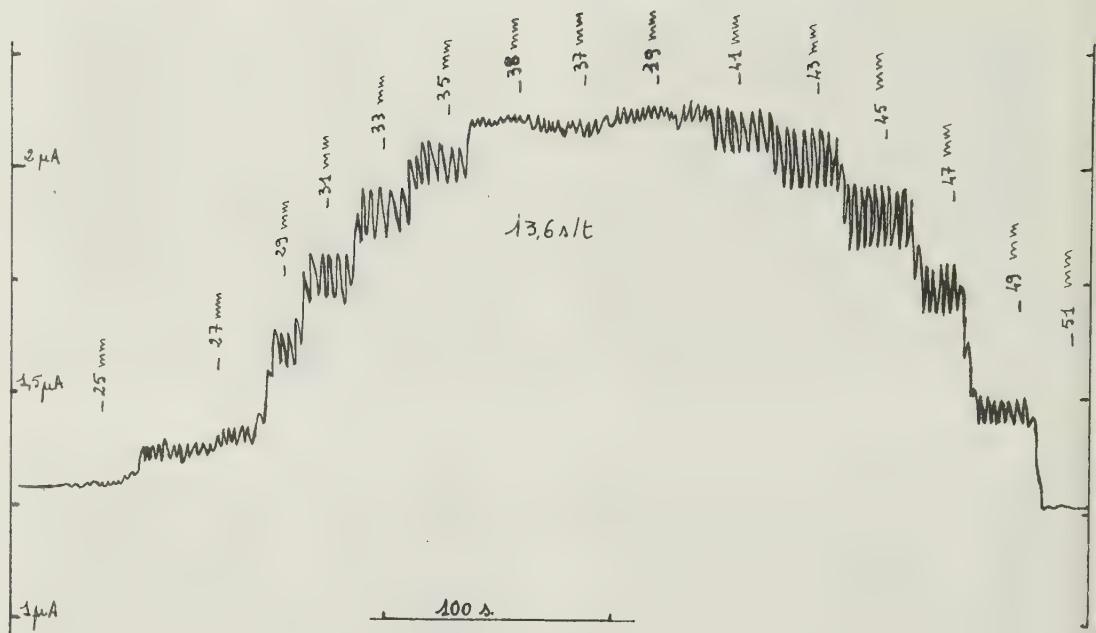


Fig 5-4 a : 2^{nde} instabilité; périodicité axiale.

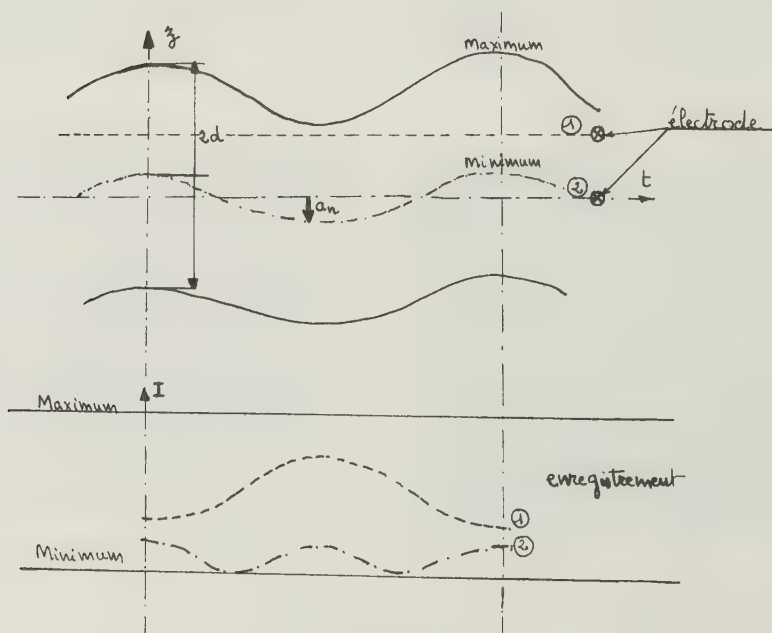


Fig. 5-4 b 2^{nde} instabilité

3- On peut également porter sur un graphique les valeurs du courant moyen en fonction de Ω_1 ; pour $\Omega_1 < \Omega_c$ et $\Omega_1 > \Omega_c$, on obtient deux courbes de pentes sensiblement différentes. Le point de discontinuité obtenu par extrapolation de chacune d'elles correspond à la vitesse critique.

4- Enfin, en prolongeant la courbe représentant les amplitudes des oscillations jusqu'à 0, il est possible de déterminer Ω_c avec une précision relativement bonne, car l'angle voisin de $\pi/2$, qu'elle fait avec l'axe des vitesses réduit l'incertitude de l'intersection. Ce procédé est surtout intéressant dans le cas où il y a des perturbations d'origine thermique pré-existantes dans le mouvement et qui faussent les mesures effectuées sur la simple détection des oscillations. Ces instabilités thermiques affectent en effet plus la forme que l'amplitude des oscillations supercritiques. On obtient une reproductibilité de 1 % dans les meilleures conditions et de 2 % dans les cas défavorables (faible viscosité due à une température élevée).

La figure 5-1 représente la vitesse critique en fonction de la viscosité du fluide. Les mesures effectuées avec la même solution à différentes températures ($10,4^\circ\text{C} < T < 26,5^\circ\text{C}$ soit $0,92 \times 10^{-2} < \nu < 1,35 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$) s'alignent sensiblement selon une droite.

V.1.2. Forme de l'instabilité

En portant sur la figure 5-1 les droites correspondant aux relations respectivement de TAYLOR (p. 14), MEKSYN (p. 15), CHANDRASEKHAR (p. 15) et STUART (p.18), on constate qu'elles sont assez voisines de la droite expérimentale (l'accord est particulièrement bon avec STUART), ce qui indique que l'instabilité obtenue dans notre cas est certainement d'un type analogue à celui des vortex de TAYLOR. On doit cependant faire deux remarques :

- d'une part les relations qui tiennent compte du fait que l'espace annulaire est petit, mais non négligeable devant R_1 ($d/R_1 = 1/10$) (TAYLOR et MEKSYN) sont plus éloignées de la réalité (8 %) que celles qui le considèrent comme infiniment petit (CHANDRASEKHAR et STUART), ce qui n'est pas très logique, puisque TAYLOR a lui-même vérifié expérimentalement sa relation à 1 % près.

- d'autre part, on a vu que l'enregistrement du courant en régime supercritique présente une périodicité dans le temps

(fig 5-3 a) compatible avec l'existence des vortex de TAYLOR lorsque ceux-ci oscillent lentement ou bien s'ils ne sont plus individualisés et s'enroulent en une spirale qui tourne avec le fluide.

En explorant la hauteur du cylindre par déplacement de la réglette supportant les micro-cathodes, on constate des oscillations analogues mais plus ou moins déphasées selon l'éloignement de l'électrode par rapport à la position centrale ; alors qu'entre deux électrodes le déphasage reste sensiblement constant ainsi que le montre la figure 5-3 b où sont reportés les trois enregistrements correspondant aux trois électrodes, rapportés à la même origine des temps. Entre C_1 et C_2 , distants de 35 mm, le déphasage est de $20 - 22$ s sur 82 s pour la période totale, soit un quart de période environ, il est à peu près le même entre C_2 et C_3 également distants de 35 mm ; C_1 et C_3 , distants de 70 mm sont pratiquement en opposition de phase. De ces observations, on déduit que le mouvement est hélicoïdal et possède une périodicité axiale de longueur d'onde 2 cm environ, c'est-à-dire deux fois l'espace annulaire (2 d).

Les expériences de visualisation confirment cette interprétation ainsi que le montre la photographie (a) de la figure 5-2.

Ce type de mouvement avait été obtenu par TAYLOR au cours de certaines de ses expériences. Il explique ce phénomène par le fait que les cellules sont très sensibles, au moment de leur apparition, au moindre mouvement axial dû à des irrégularités de surface ou à de la convection thermique. La description qu'il en fait ne correspond cependant pas exactement à ce que nous observons. En effet, il constate une forte dissymétrie entre deux vortex successifs alternativement de petite ou de grande dimension ; dans notre cas ils sont au contraire assez réguliers.

SNYDER et KARLSSON [65] ont fait une série d'expériences où ils imposent un écart de température ΔT entre les deux cylindres ; pour ΔT suffisamment grand ($> 2^\circ\text{C}$) ils ont également observé cette forme d'instabilité et trouvé que l'angle φ de la spirale avec le plan horizontal était défini par $\text{tg } \varphi = \frac{2d}{2\pi R_0}$, ce qui, appliqué à notre cas, montre que la spirale tourne autour de l'axe des cylindres à la vitesse moyenne $\frac{\Omega_1}{2}$. KRUEGER, GROSS et DI PRIMA [66] ont montré théoriquement que lorsque les deux cylindres tournent en sens inverse, ce type de perturbation apparaît à une vitesse légèrement plus faible que

celle correspondant à l'apparition des cellules de TAYLOR. Il est possible que dans le cas de notre montage ce phénomène existe aussi, ce qui expliquerait que la vitesse critique observée expérimentalement soit inférieure de quelques % à celle prévue. A ce sujet plusieurs hypothèses peuvent être avancées :

- le faible rapport entre la hauteur (14 cm) et la largeur (1 cm) de l'espace annulaire et le fait qu'il ne soit pas limité inférieurement par une paroi peut éventuellement faciliter l'apparition de l'instabilité; d'autant plus que le fond du cylindre intérieur malgré son large évidement agit comme un disque tournant qui projette par force centrifuge le liquide vers l'extérieur, induisant des mouvements de rotation dans la partie inférieure de l'espace annulaire qui peuvent se transmettre à tout le liquide ; à l'appui de cette remarque, on constate expérimentalement que les cellules se forment d'abord à la partie inférieure puis supérieure et gagnent progressivement la partie centrale de l'espace annulaire. Il pourrait s'agir d'un processus analogue à celui rencontré lorsque les deux cylindres tournent en sens inverse : dans la zone proche du cylindre intérieur le liquide est instable, par contre au-delà de la surface de vitesse nulle, le liquide est stable ; or l'expérience montre qu'il est entraîné par le mouvement des cellules internes (fig 1-1 b).

- une autre cause de moindre stabilité peut être un léger décentrement relatif des deux cylindres. RICHTIE [67] dans une étude très récente a analysé l'effet de l'excentricité sur la valeur de la vitesse critique. La courbe représentant le nombre de TAYLOR qu'il obtient correspond sensiblement pour de faibles excentricités à $T(e) = T(1 - 1,7 e)$ où e représente l'excentricité des deux cylindres définie par le rapport de la distance des deux axes à l'espace annulaire moyen. Dans notre cas : $e = \frac{2}{1\ 000 \times 1} = \frac{1}{500}$ donc $T(e) = T(1 - \frac{1}{300})$.

Cette correction est faible par rapport à l'écart enregistré.

Pour la suite de notre étude, nous nous sommes toujours référés au nombre de TAYLOR défini par STUART qui est le plus proche de nos résultats (bien qu'établi pour $\frac{d}{R_1} \ll 1$) :

$$T_g = R_1 d^3 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2 = T \quad \text{avec } T_{sc} = 1\ 708 = T_c$$

Cette définition a l'intérêt d'être simple car elle peut s'écrire sous la forme $\sqrt{T} = \sqrt{d/R_1} \cdot Re$, produit de deux termes qui tiennent compte

l'un de la vitesse (nombre de REYNOLDS) et l'autre de la courbure ($\frac{d}{R_1}$) de l'écoulement. $\sqrt{T_c} = 41,3$.

V.1.3. Interprétation de la forme des oscillations

enregistrées

Au voisinage de la vitesse critique, l'hypothèse de TAYLOR selon laquelle les composantes de la perturbation, de la forme : $u = u_1 \cos \lambda z$, $v = v_1 \cos \lambda z$, $w = w_1 \sin \lambda z$, sont très petites devant la vitesse circonférentielle V , reste valable. Par conséquent les variations du module de la vitesse sont dues essentiellement à la composante de la perturbation selon V :

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + (\bar{V} + v)^2 + w^2} \simeq (\bar{V} + v) \left(1 + \frac{u^2 + w^2}{2(\bar{V} + v)^2} \right) \simeq \bar{V} + v_1 \cos \lambda z$$

Ainsi la vitesse varie périodiquement selon oz , autour de la valeur moyenne V . Il en est de même du gradient normal de vitesse auquel est sensible l'électrode :

$$S \simeq S_{\bar{V}} + s_{v_1} \cos \lambda z \quad \text{avec} \quad S_{\bar{V}} \gg s_{v_1} \quad (V-1)$$

On en déduit le flux de matière à l'électrode :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S}{d_0} \right)^{1/3} \simeq 0,807 \left(\frac{D^2 S_{\bar{V}}}{d_0} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{s_{v_1} \cos \lambda z}{3 S_{\bar{V}}} \right) \quad (V-2)$$

Puisque v est en phase avec u , le transfert est maximum lorsque le liquide se dirige vers la surface du cylindre extérieur ; il est minimum dans le cas inverse (fig 5-3 c).

En supposant que le mouvement observé dans notre cas est constitué par une perturbation du type de TAYLOR disposée selon une hélice de pas $2d$ et tournant à la vitesse $\Omega_1/2$, on obtient :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S_{\bar{V}}}{d_0} \right)^{1/3} \left[1 + \frac{s_{v_1}}{3 S_{\bar{V}}} \cos \lambda \left(z - \frac{d \Omega_1 t}{2 \pi} \right) \right] \quad (V-3)$$

Pour une position de l'électrode donnée (z déterminé), on a donc une variation périodique du flux de matière en fonction du temps. Lorsque t augmente de $\frac{4\pi}{\Omega_1}$, (le double de la période de rotation du cylindre),

K reprend la même valeur. Ainsi se trouve justifiée la forme sensiblement sinusoïdale des oscillations enregistrées.

V.2 - Second type d'instabilité. Développement ultérieur du mouvement

V.2.1. Seconde vitesse critique

Si à partir de Ω_c on accroît la vitesse, comme nous l'avons vu, l'amplitude des oscillations croît rapidement (fig 5-3 a) ; et l'on constate une déformation progressive de chaque période. Pour une vitesse Ω_c' il apparaît une oscillation harmonique généralement d'ordre 3, qui se superpose à l'oscillation fondamentale et se développe à son détriment. Au bout d'un certain temps, un nouvel état s'établit par un nivellement de toutes les amplitudes et l'on ne distingue plus la période fondamentale ; seule subsiste la période élémentaire qui en est un sous-multiple. L'enregistrement est alors d'une parfaite régularité. Une exploration de la génératrice du cylindre montre que le courant moyen est périodique dans la direction axiale comme on peut le constater sur la figure 5-4 a, la longueur d'onde restant de l'ordre de 20 mm, l'amplitude des oscillations variant selon la position de l'électrode. On ne peut interpréter cette dernière observation que par la disparition de la spirale et la reconstitution de cellules indépendantes qui oscillent. La photographie (b) de la figure 5-2 représente la visualisation d'un tel mouvement périodique à la fois dans les directions axiale et azimutale.

Ainsi se trouve mise en évidence la seconde vitesse critique marquant l'apparition du second type d'instabilité. La détermination de Ω_c' ne peut être faite aussi précisément que celle de Ω_1 , le changement étant moins reproductible ; en particulier selon que, pour l'atteindre, la vitesse est augmentée ou diminuée, les valeurs peuvent être assez différentes comme nous le verrons au paragraphe V.5.

Pour $\nu = 1,04 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ en accroissant lentement la vitesse depuis Ω_c , on obtient $157 < \Omega_c' < 164$ soit $151 < Re_c' < 158$.

L'origine de ce second type d'instabilité est jusqu'à présent mal connue. FRAENKEL [68] émet l'hypothèse que son apparition est en rapport avec l'amplitude de la première perturbation : la frontière commune de deux cellules deviendrait instable et se mettrait à osciller lorsque le rapport des composantes verticale et circonférentielle atteindrait une certaine valeur à déterminer.

Reprenant cette idée, COLES [6] utilise l'analyse de DAVEY [27] pour proposer la relation :

$$1,56 = \left[\frac{R_1}{d} \cdot \left(1 - \frac{T_c}{T_1} \right) \right]^{1/2} \quad \text{où } T_c \text{ représente la valeur critique du}$$

nombre de TAYLOR pour la seconde instabilité, soit dans notre cas :

$$\frac{\Omega'_c}{\Omega_c} = 1,15 \text{ au lieu de } 1,20 \text{ en moyenne trouvé expérimentalement ce qui}$$

constitue un accord satisfaisant. Plus d est petit devant R_1 , plus T_c est proche de T'_c ; DI PRIMA [42] dans l'approximation du petit espace annulaire a étudié théoriquement la stabilité de l'écoulement à une perturbation doublement périodique. En appliquant son calcul au cas $R_1/R_2 = 0,8$ il montre que la vitesse critique Ω'_c croît avec l'ordre de l'harmonique ; pour les ordres 1 à 4, Ω'_c n'est supérieur que de quelques % à Ω_c .

ROBERTS [43] a résolu numériquement le problème pour différentes valeurs de R_1/R_2 . Lorsque $R_1/R_2 = 0,9$, il obtient respectivement $\Omega'_c/\Omega_c = 1,005$ et $1,022$ pour les harmoniques 1 et 2 ; par extrapolation, nous avons déterminé les valeurs approximatives correspondant aux harmoniques 3 et 4 : respectivement $1,05$ et $1,09$. La comparaison avec nos résultats semble indiquer que le mouvement hélicoïdal est plus stable que les cellules de TAYLOR à la perturbation selon θ .

On peut cependant remarquer que les calculs de DI PRIMA et ROBERTS ne s'appliquent pas exactement à notre cas puisqu'ils étudient la stabilité de l'écoulement subcritique et non celle des cellules de TAYLOR à la perturbation azimutale.

V.2.2. Interprétation des enregistrements.

Considérons l'écoulement après l'apparition du second type d'instabilité comme la superposition d'un mouvement périodique selon oz défini par les mêmes relations que les cellules de TAYLOR et d'une onde se propageant selon θ , d'amplitude a_n et de pulsation ω_n , fonction de Ω_1 et de l'ordre n de l'harmonique (fig 5-4 b).

En faisant les mêmes hypothèses que précédemment sur l'importance relative de la perturbation par rapport au mouvement moyen,

le gradient normal de vitesse au niveau de l'électrode est donné par :

$$S \approx S_V + s_{V1} \cos \lambda (z - a_n \cos \omega_n t) \quad \text{avec } S_V \gg s_{V1} \quad (V-3)$$

et le transfert de matière :

$$K = 0,887 \left(\frac{D^2 S_V}{d_0} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{s_{V1}}{3S_V} \cos \lambda (z - a_n \cos \omega_n t) \right) \right] \quad (V-4)$$

L'enregistrement du courant en un point de cote z permet donc de déterminer la périodicité circonférentielle du mouvement ; il peut cependant présenter une certaine difficulté d'interprétation ; en effet en calculant la dérivée de K par rapport à t , on s'aperçoit que le transfert passe par un extremum pour $\omega_n t = k_1 \pi$ mais également pour :

$$\omega_n t = 2 k_2 \pi + \text{Arcos} \left(\frac{z - k_3 d}{a_n} \right) \quad (V-5)$$

Si $a_n > d$, quel que soit z , (V-5) a toujours une solution.

Si $a_n < d$, (V-5) n'a de solution que pour : $k_3 \cdot d - a_n < z < k_3 \cdot d + a_n$

Dans le cas où (V-5) est satisfaisante, l'enregistrement présente une double oscillation par période (figure 5-4 c) ; dans le cas contraire, une oscillation simple. On a ainsi un moyen de déterminer l'amplitude a_n de la perturbation azimutale.

La représentation réelle du mouvement n'est en fait pas aussi simple que l'indique la relation (V-3). La visualisation montre en effet que les ondes limitant chaque cellule possèdent entre elles un déphasage d'un quart de période environ ($\pm \pi/2$) (fig 5-2 b et c), ce qui affecte la forme des cellules dont la section varie périodiquement selon θ . Cette différence n'a cependant pas pu être mise clairement en évidence dans nos enregistrements.

V.2.3. Mouvement ultérieur

Si l'on continue d'augmenter Ω_1 au-delà de Ω'_c , on constate que l'instabilité doublement périodique subsiste dans un domaine relativement étendu comme le montre les photographies (b), (c), (d) de la figure 5-2, qui correspondent aux nombres de REYNOLDS : 339, 739 et 1 046. On assiste cependant à deux types de transition illustrés par les enregistrements reproduits sur les figures 5-5 a et b qui peuvent

Être interprétées comme un changement du nombre de cellules du fait de la variation brusque du courant moyen (fig 5-5 a) ou comme un changement du nombre d'ondes (fig 5-5 b). Ces observations rejoignent celles qui ont été faites par COLES concernant la multiplicité des états d'écoulement qui peuvent être obtenus. Ces états qui relèvent du même type d'instabilité sont caractérisés par un couple de nombre d'onde axial et azimutal. Nous réservons au paragraphe V.5 l'étude de ce problème.

A partir de $\Omega_1 \simeq 1,6$ rd/s ($Re \simeq 1\ 660$), les oscillations du courant enregistrées pour une position fixe de l'électrode deviennent de moins en moins régulières, et sont relativement plus importantes, mettant ainsi en évidence la "dégradation" progressive de l'instabilité circonférentielle.

Lorsqu'on explore la génératrice du cylindre, on constate que la périodicité axiale conserve sa régularité mais qu'il existe une différence de plus en plus marquée entre les limites de chaque cellule (fig 5-5 c) : pour la limite correspondant au maximum de transfert, l'amplitude moyenne des oscillations est plus grande que celle qui correspond au minimum, alors qu'aux vitesses inférieures, les enregistrements sont sensiblement les mêmes dans les deux cas.

Ces résultats concordent avec ce qu'on observe sur la photographie 5-2 e ($Re = 2\ 510$) : les zones pour lesquelles le mouvement de rotation des cellules s'effectue vers l'intérieur (minimum) sont très visibles et beaucoup moins "tourmentées" que les zones, plus difficiles à distinguer, où le mouvement se fait vers l'extérieur (maximum) ; la périodicité azimutale a pratiquement disparu dans ce cas.

Pour les vitesses supérieures, la périodicité axiale se déforme à son tour, mais reste observable (fig 5-5 d) jusqu'aux plus grandes valeurs de Ω_1 qui ont pu être réalisées ($Re \simeq 50\ 000$). Sur la photographie 5-2 f ($Re = 43\ 900$) on voit nettement la succession de parties claires et sombres alors que le mouvement est franchement turbulent.

Les grandes fluctuations de courant enregistrées à la naissance de la turbulence deviennent de plus en plus fines au fur et à mesure de son développement. Elles sont cependant perturbées par une oscil-

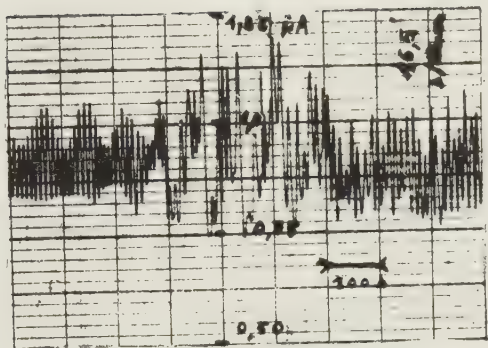
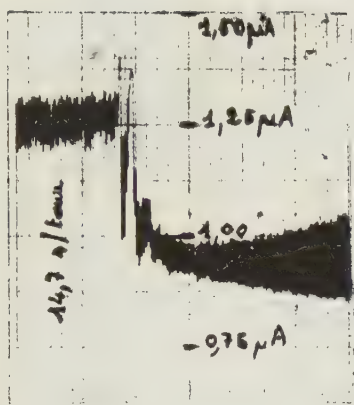


Fig 5-5a changement du nombre de cellules

Fig 5-5b changement du nombre d'ondes

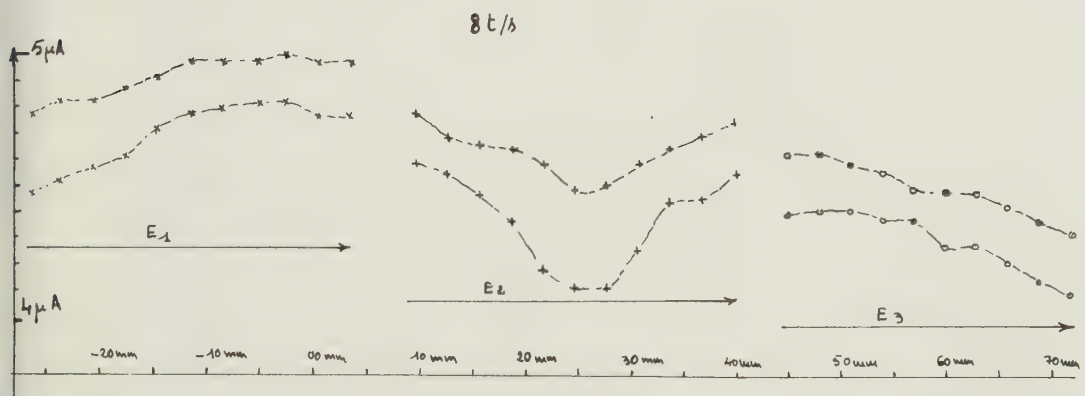


Fig 5-5c. Périodicité résiduelle pour $N = 8 \text{ t/s}$

lation de fréquence voisine du quart de la fréquence de rotation du cylindre, que l'on peut observer directement (la surface supérieure du liquide monte et descend périodiquement).

Cette oscillation qui semble très sensible au centrage des cylindres, ne peut être totalement éliminée, elle interfère avec les fluctuations aléatoires d'origine turbulente dont l'analyse en fréquence se trouve ainsi faussée.

V.3. Résultats des mesures de transfert en fonction de la vitesse de l'écoulement

Compte tenu de l'interprétation qui a été faite concernant les variations périodiques du courant moyen dans la direction axiale en rapport avec l'existence de cellules dont les limites correspondent à des extremums du flux, nous avons, pour chaque vitesse d'écoulement, exploré toute la hauteur du cylindre et tabulé les valeurs maximales I_M et minimales I_m du courant ainsi que les valeurs $I_{1/2}$ obtenues au milieu de chaque cellule. Au cours de ces mesures, nous nous sommes surtout intéressés aux résultats fournis par l'électrode C_2 dont la position centrale peut la faire considérer comme située entre deux cylindres infiniment longs ce qui n'est pas le cas des deux autres. Nous avons remarqué en effet que dans la partie supérieure de l'espace annulaire, couverte par l'électrode C_3 , les oscillations possédaient parfois une amplitude plus faible (fig 5-2 d) sans doute à cause de la proximité de la surface libre ; quant aux mesures effectuées avec C_1 , elles étaient dans certains cas faussées par des perturbations qui prenaient naissance dans le fond de l'appareil.

Les résultats * d'une série d'expériences sont reproduits en coordonnées logarithmiques sur la figure 5-6 où les coefficients de transfert maximal, minimal et médian K_M , K_m et $K_{1/2}$ sont présentés en fonction du nombre de REYNOLDS et de la racine carrée du nombre de TAYLOR

*Pour ne pas alourdir ce mémoire tous les tableaux de valeurs n'ont pas été reproduits ici ; ils peuvent être consultés au Laboratoire de Mécanique de l'E.N.S.E.M. Seul le tableau D rapporte les valeurs de $K_{1/2}$ pour 3 expériences.

de l'écoulement. Ils correspondent à des mesures moyennes effectuées sur au moins deux cellules pour s'affranchir de certaines différences (quelques %) observées parfois d'une cellule à l'autre. Leur reproductibilité est relativement bonne si l'on tient compte du fait qu'ils ont été obtenus dans des conditions souvent très différentes : augmentation, ou diminution, lente ou rapide de la vitesse d'entraînement favorisant l'obtention de nombreux états d'écoulement. Dans la plupart des cas, le coefficient de transfert médian est proche du transfert moyen ($K_{1/2} \simeq (K_M + K_m)/2$). Les diverses phases du mouvement précédemment mises en évidence peuvent être repérées en considérant les variations respectives de K_M et K_m .

La détection de la première instabilité est évidente selon les méthodes 3 et 4 du paragraphe V.1.1 : $\sqrt{T_c} = 41,0$; $Re_c = 130$.

Le second type d'instabilité apparaît sensiblement au minimum de la courbe K_m : $\sqrt{T_c} = 50$; $Re_c = 158$; ce qui semble indiquer qu'il modifie par sa présence la loi de croissance de la perturbation axiale. On constate également que la pente de la courbe $K_{1/2}$ jusqu'alors voisine de 0,65 commence à décroître à partir de cette vitesse.

Dans l'intervalle $160 < Re < 320$, K_M , K_m et $K_{1/2}$ augmentent pratiquement selon la même loi $\propto Re^{0,55}$, puis divergent pour converger de nouveau à partir de $Re \simeq 1600$, qui correspond comme nous l'avons vu à l'apparition des premières fluctuations turbulentes. $K_{1/2}$ croît selon $Re^{0,48}$.

Dans la zone $1\ 000 < Re < 2\ 100$ pour la branche inférieure (K_m), et $1\ 500 < Re < 3\ 500$ pour la branche supérieure (K_M), on constate une dispersion plus importante des résultats avec, dans certains cas de vitesse croissante, des discontinuités, indiquées par des flèches, rappelant, en beaucoup plus faibles, des phénomènes d' "hystérésis" suivis de modifications brusques, observés dans certaines transitions laminaire-turbulent.

L'écart entre les deux branches $K_M - K_m$ qui mesure l'amplitude de la perturbation axiale croît en valeur relative jusqu'à $Re \simeq 2\ 500$, puis décroît ensuite constamment, le développement de la

turbulence réduisant progressivement toute périodicité dans l'écoulement.

Pour $Re > 20\ 000$, K_M et K_m tendent à croître, comme $K_{1/2}$, selon la racine carrée de la vitesse.

V.4. Détermination de la valeur moyenne et de l'amplitude de la perturbation et comparaison avec les résultats de la théorie non linéaire de STUART

Etant donné le caractère tridimensionnel de l'écoulement et du fait de la forme circulaire de l'électrode qui n'est sensible qu'à deux composantes de la vitesse : tangentielle, quelque soit son orientation (v, w) , et normale (u) , il n'est pas possible dans le cas général de déterminer les trois composantes à partir d'une seule mesure de flux. Il importe de faire certaines hypothèses sur la forme de ces composantes, ainsi que sur leur importance vis à vis du mouvement moyen qui permettent de simplifier le problème et d'avoir une solution approchée valable au moins dans les premiers stades de l'instabilité. C'est à ce titre que nous avons utilisé la théorie non linéaire de STUART adaptée à notre cas pour connaître les ordres des grandeurs et ainsi être guidé dans nos approximations.

V.4.1. Théorie non linéaire de STUART et son utilisation dans le cadre de notre méthode de mesure

STUART tient compte de la distorsion du mouvement moyen du fait de la présence de la perturbation mais suppose que celle-ci a même forme que dans la théorie linéaire. C'est pourquoi il utilise le mode de résolution de CHANDRASEKHAR dont l'intérêt du point de vue formel est évident.

En supposant $R_1 \gg d$, l'équation (I,11) s'écrit :

$$(\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2}) (\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2} - k^{*2})^2 v_1 + \lambda^{*2} \tau v_1 = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2}) (\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2} - k^{*2})^2 v_1 + \lambda^{*2} \tau v_1 = 0 \\ \text{avec les conditions : } v_1 = \mathcal{D}^2 v_1 = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2} - k^{*2}) v_1 \text{ pour } \xi = \pm 1/2 \\ \text{où } r = R_0 + \xi d ; \lambda^* = \lambda d ; k^* = kd^2/\gamma ; \mathcal{D} = d/d\xi \end{matrix}} \right\} (V,6)$$

CHANDRASEKHAR montre que la solution $v_1(r)$ dépend d'une fonction $S(\xi)$ définie par :

$$S = -\frac{1}{8\pi^2} + \frac{1}{\pi^4} + \frac{\xi^2}{2\pi^2} + \frac{\cos \pi \xi}{4\pi^3} + \frac{\mathcal{A}}{2\pi^3} \left(1 + \frac{1}{5} \cos 2\pi \xi\right) - \frac{1}{\pi^4} \left(1 + \frac{\mathcal{A} 2\pi}{5}\right) \frac{\cos h \pi \xi}{\cos h \pi/2} \quad (V,7)$$

où $\mathcal{A}$ calculé par un processus variationnel est égal à : - 0,02686.

Il obtient $u_1 = -a r_1 \Omega_1 \mathcal{P}$ (V,6 a)

et $v_1 = (ar_1^2 \Omega_1 d/\nu) S$ (V,6 b) avec $\mathcal{P} = (\mathcal{D}^2 - \lambda^{*2}) S$

w_1 se déduit de u_1 par l'équation de continuité (I,9). Si on néglige le

terme en $1/r$, on a : $w_1 = \frac{+ a r_1 \Omega_1 \mathcal{D} \mathcal{P}}{\lambda^*}$ (V,6 c)

a est un coefficient arbitraire ; STUART le définit comme l'amplitude de la perturbation.

Utilisant les relations (V,6 a,b,c), il montre à partir de l'équation (I,13 b) que le mouvement moyen est donné par :

$$\bar{V} = \frac{1}{2} R_1 \Omega_1 (1 - 2\xi) - (a^2 R_1^3 \Omega_1^3 d^2/\nu^2) Q(\xi) \quad (V,7)$$

$$\text{avec } Q(\xi) = -2 \int_{-1/2}^{\xi} d\xi + 2\xi \int_{-1/2}^{+1/2} Z d\xi + \int_{-1/2}^{+1/2} Z d\xi$$

$$\text{et } Z = -S\mathcal{P}$$

et le gradient normal de vitesse :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{V}}{r} = -\frac{R_1 \Omega_1}{d} - 2a^2 \frac{R_1^3 \Omega_1^3}{\nu^2} d \left[\int_{-1/2}^{+1/2} Z d\xi - Z(\xi) \right] \quad (V,8)$$

En appliquant les mêmes relations pour l'équation (I,14), il obtient l'équation vérifiée par l'amplitude (I,15), $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ étant des intégrales définies par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{-1/2}^{+1/2} S^2 d\xi \\ &= 6,7302297 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \gamma_2 &= \int_{-1/2}^{+1/2} Z d\xi \\ &= 1,333118 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

* Nous avons calculé ces intégrales utilisées mais non publiées par STUART.

$$\gamma_3 = -2 \left(\int_{-1/2}^{+1/2} Z d\xi \right)^2 + 2 \int_{-1/2}^{+1/2} Z^2 d\xi = 2,4571710 \times 10^{-10}$$

$$\gamma_4 = \int_{-1/2}^{+1/2} \left[(D^2 - \lambda^{*2}) \mathcal{P} \right]^2 d\xi = 0,22473134$$

(V,9)

On obtient donc pour l'amplitude d'équilibre :

$$a_e^2 = \frac{5.425 \times 10^4}{R_e^2} \left(1 - \frac{1.708}{T} \right) \quad (V,10)$$

La diffusion de matière affectant uniquement la région très voisine de l'électrode, il suffit de connaître le comportement des différentes fonctions pour ξ voisin de $+1/2$.

Si l'on pose $\xi = 1/2 - h$ avec h très petit, les différents développements limités de u_1 , v_1 et w_1 donnent :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\simeq a_e R_1 \Omega_1 \left\{ \left(\frac{1}{2} + \mathcal{R} \pi \right) h^2 \right\} = a_e R_1 \Omega_1 \times 0,58434 h^2 \\ v_1 &\simeq a_e R_1^2 \Omega_1^2 d/\gamma \left(- \frac{1}{4\pi^2} - \frac{\text{Th } \pi/2}{\pi^3} + \frac{2\mathcal{A} \text{Th } \pi/2}{5\pi^2} \right) h = \\ &= a_e R_1^2 \Omega_1^2 d/\gamma \times 3,265 \times 10^{-3} h \\ w_1 &\simeq a_e R_1 \Omega_1 \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{A} \pi \right) h \right\} = a_e R_1 \Omega_1 \times 0,3719 h \end{aligned} \right\} \quad (V,11)$$

Soit en tenant compte de (V,11) et en posant $y = h d$:

$$u_1 = 136,15 \frac{\gamma}{d^3} \left(1 - \frac{T_c}{T} \right)^{1/2} y^2 = \beta_1 y^2$$

$$v_1 = 0,7607 \frac{R_1 \Omega_1}{d} \left(1 - \frac{T_c}{T} \right)^{1/2} y = s_{v_1} y \quad (V,12)$$

$$w_1 = 86,676 \frac{\gamma}{d^2} \left(1 - \frac{T_c}{T} \right)^{1/2} y = s_{w_1} y$$

Les composantes ont la forme du mouvement proposé au paragraphe II.3.3 : v_1 et w_1 , composantes tangentielles, $\propto y$ et u_1 , composantes normales, $\propto y^2$.

En remplaçant $\left(\frac{R_1 \Omega_1}{d} \right)$ premier terme de (V,8) par

$\frac{R_1 \cdot \Omega_1}{d} \cdot \frac{R_1}{R_0}$ pour tenir compte du fait que notre montage ne représente pas exactement le cas idéal, $d/R_1 \ll 1$, on obtient :

$$S_V = \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{V}}{r} \right)_{r=R_2} = - \frac{R_1 \Omega_1}{d} \left[1 + 1,4464 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right] \quad (V,13)$$

L'étude des variations respectives de β_1 , s_{v1} , s_{w1} et S_V pour $T > T_c$ montrent que :

- β_1/S_V croît à partir de 0, passe par un maximum : 0,345 pour $T \simeq 1,10 T_c$, puis décroît vers 0.
- s_{v1}/S_V croît à partir de 0, passe par un maximum : 0,325 pour $T \simeq 1,35 T_c$, puis décroît vers 0,310.
- s_{w1}/S_V croît depuis 0, passe par un maximum : 0,220 pour $T \simeq 1,10 T_c$ puis décroît vers 0.

Au vu des résultats de cette théorie, on est conduit à faire deux remarques :

- d'une part, le terme $k_2 L = \beta/S \cdot L$ qui intervient dans la relation (II,28) pour déterminer le transfert de matière au niveau d'une électrode lorsque le mouvement possède une composante βy^2 et qui devient $k_2 d_0 = \frac{\beta d_0}{S_V}$ dans le cas considéré avec une électrode circulaire, est au plus égal à $3,45 \times 10^{-2}$, ce qui justifie l'hypothèse : $3k_2 L$ petit devant 1, faite pour obtenir (II,28) à partir de (II,27).
- d'autre part, on s'aperçoit que l'amplitude de la perturbation croît très vite et de ce fait ne peut plus être supposée négligeable devant le mouvement moyen.

Cependant, on n'aura garde d'oublier que la théorie de STUART a été établie pour un taux de croissance k petit, c'est-à-dire dans un domaine proche de la vitesse critique et que de ce fait les résultats qu'elle donne pour $T > (1,5 \text{ à } 2) T_c$ restent incertains. Il est également nécessaire de rappeler qu'elle ne tient aucun compte des autres types d'instabilités qui peuvent exister.

V.4.2. Mesures de gradient pariétal. Coefficient de frottement moyen

Dans le domaine de vitesse où le mouvement est conforme aux hypothèses de TAYLOR, seule la composante selon V possède en moyenne un moment non nul par rapport à l'axe. Cet effet de moyenne ne se retrouve pas dans le flux de matière à l'électrode car celle-ci, du fait de sa forme circulaire, est sensible à la valeur absolue de la vitesse mais non à sa direction.

La valeur mesurée de la vitesse la plus proche de $\bar{V}$ est celle qui correspond au milieu de chaque cellule ($\lambda z = \pi/2$) dans ce

cas : $|\vec{V}| = \sqrt{\bar{V}^2 + w_1^2} \simeq \bar{V} \left(1 + \frac{w_1^2}{2\bar{V}^2}\right)$. Pour $w_1 = 1/4 \bar{V}$ (valeur

maximale selon la théorie non linéaire), $|\vec{V}|$ n'est que de 3 % environ supérieure à $\bar{V}$, soit 1 % sur les valeurs du transfert, ce qui est inférieur aux erreurs de mesure. Nous supposons qu'aux plus grandes vitesses, les cellules restent suffisamment symétriques pour que ce raisonnement continue d'être valable.

La connaissance de $K_{1/2}$ permet donc de déterminer au moyen de la courbe d'étalonnage (fig 4-5) le gradient pariétal S_V et par là le frottement moyen. Les résultats sont reproduits dans le tableau D. Pour pouvoir être comparés avec les mesures de couple réalisées par plusieurs auteurs avec des géométries correspondant également au petit espace annulaire,

(DONNELLY [28]	: $R_1 = 1,9$ cm	et $R_2 = 2,0$ cm
WENDT [29]	: $R_1 = 13,75$ cm	et $R_2 = 14,70$ cm
TAYLOR [30]	: $R_1 = 3,68$ cm	et $R_2 = 4,05$ cm)

les valeurs ont été réduites sous forme adimensionnelle. Le choix des variables $\sqrt{T}$ en abscisse et de

$$F^* = \frac{\tau_1 R_0}{\rho \Omega_1^2 \sqrt{dR_1} R_2^2} = \frac{\tau_2 R_0}{\rho \Omega_2^2 \sqrt{dR_1} R_1^2} \quad \text{en ordonnée } (\tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ étant}$$

les forces de frottement s'exerçant par unité de surface sur les cylindres intérieur et extérieur), permet de faire coïncider les courbes en régime laminaire, jusqu'à l'apparition des instabilités. Le coefficient de

frottement F^* distinct de celui choisi par DONNELLY et SIMON [69]
 $(\tau_1 / 1/2 \rho \Omega_1^2 R_1^2)$ a l'avantage de ne pas dépendre du cylindre où a été
 mesuré le frottement. τ_1 et τ_2 peuvent être en effet assez différents
 puisque l'égalité des moments impose : $\tau_1 R_1^2 = \tau_2 R_2^2$, ainsi dans notre
 cas : $\tau_1 = 1,21 \tau_2$.

Les résultats sont présentés sur la figure 5-7. La
 bonne concordance de nos valeurs avec les mesures de couples justifie les
 approximations qui ont été faites. A part les résultats de TAYLOR qui
 semblent trop forts, peut-être à cause de l'absence de cylindres de garde,
 les courbes restent relativement proches après la naissance du régime
 instable ; on peut de ce fait considérer T comme la grandeur caractéris-
 tique de l'écoulement entre deux cylindres dans le cas d'un petit espace
 annulaire. La relation empirique proposée par WENDT pour représenter la
 partie sensiblement rectiligne des courbes vient à l'appui de cette
 remarque puisqu'il trouve que le frottement est proportionnel à
 $(\frac{d R_2}{R_1})^{1/4} Re^{-1/2}$ (pour $4 \times 10^2 < Re < 10^4$) qui est très voisin de $T^{1/4}$
 lorsque $R_2 \neq R_1$; dans notre cas, on obtient la relation particulièrement
 simple : $F^* = 0,20 T^{-1/4}$.

BATCHELOR [69] explique cette puissance - 1/2 du
 nombre de Reynolds par l'existence d'une couche limite qui se développe
 dans chaque cellule lorsque le mouvement est suffisamment rapide, $T^{1/4}$
 étant justement le nombre de Reynolds relatif à cette couche limite.

Aux grandes vitesses cependant, cette explication
 paraît difficile à soutenir, car il y a une modification profonde de
 l'écoulement. Pour $\sqrt{T} = 2000$, le frottement est dix fois plus important
 que celui qui existerait en régime laminaire stable à la même vitesse, ce
 qui signifie, en supposant que le phénomène se reproduit sur le cylindre
 intérieur, que la variation de vitesse a lieu presque exclusivement dans
 10 % (2×5 %) de l'espace annulaire au niveau de chaque cellule ; et dans
 les 90 % restant, la vitesse est sensiblement constante. A ce sujet,
 TAYLOR [70] à partir de mesures de pression effectuées à l'aide d'un
 tube de Pitot, a montré qu'aux grandes vitesses d'écoulement la circu-
 lation V_r était constante dans 80 à 85 % de l'espace annulaire, ce qui

TABLEAU D

Coefficient de transfert médian et coefficient de frottement

$$C_0 = 0,75 \times 10^3 \text{ mole/cm}^3$$

$$T = 21^\circ \text{ C}$$

$I \text{ } \mu\text{A}$	0,435	0,470	0,475	0,505	0,550	0,620	0,674	0,733	0,787
$K_{1/2} \times 10^3 \text{ cm/s}$	0,807	0,871	0,881	0,926	1,02	1,15	1,25	1,36	1,46
$S \text{ s}^{-1}$	1,56	2,01	2,10	2,45	3,35	4,85	6,35	8,30	10,60
10^2 N t/s	2,32	2,58	2,67	2,91	3,42	4,13	4,88	5,81	6,85
$\sqrt{T_s}$	44,3	49,2	50,9	55,5	65,2	78,8	93,1	110,9	130,7
$F^* \times 10^3$	25,3	16,4	25,7	25,3	25,0	24,8	23,3	21,5	19,75

$I \text{ } \mu\text{A}$	0,832	0,900	0,955	1,000	1,050	1,110	1,137	1,237	1,300
$K_{1/2} \times 10^3 \text{ cm/s}$	1,54	1,67	1,77	1,85	1,945	2,05	2,11	2,29	2,41
$S \text{ s}^{-1}$	12,7	16,0	19,2	22,3	28,3	34,5	36,5	48,0	55,5
10^2 N t/s	7,94	9,35	10,63	11,90	13,43	14,90	16,30	18,20	20,00
$\sqrt{T_s}$	151,5	178,4	202,8	227,0	256,3	284,3	311,0	347,3	381,6
$F^* \times 10^3$	18,0	16,0	14,8	13,7	12,5	12,0	11,9	11,3	11,1

____ TABLEAU D ____

Coefficient de transfert médian et coefficient de frottement

$$C_o = 0,665 \times 10^{-6} \text{ mole/cm}^3$$

$$T = 21^\circ \text{ C}$$

I μA	0,79	0,93	1,06	1,18	1,27	1,34	1,45	1,48	1,58
$K_{1/2} \times 10^3$ cm/s	1,65	1,943	2,215	2,47	2,67	2,80	3,05	3,09	3,33
S s ⁻¹	17,2	28,5	44,0	62,0	70,0	82,0	104	111	136
10 ² N t/s	0,0926	0,1235	0,164	0,222	0,263	0,2905	0,337	0,375	0,422
$\sqrt{T_s}$	177	236	313	424	502	554	643	716	805
F* $\times 10^3$	16,72	14,9	12,56	9,73	8,855	8,50	8,03	6,91	6,68

I μA	1,71	1,84	1,95	2,06	2,21	2,35	2,45	2,70
$K_{1/2} \times 10^3$ cm/s	3,57	3,84	4,07	4,30	4,62	4,91	5,12	5,64
S s ⁻¹	175	220	265	315	390	4,75	540	725
10 ² N t/s	0,500	0,565	0,645	0,720	0,834	0,921	1,00	1,162
$\sqrt{T_s}$	954	1078	1231	1374	1591	1757	1908	2217
F* $\times 10^3$	6,12	6,02	5,57	5,31	4,90	4,88	4,72	4,70

TABLEAU D

Coefficient de transfert médian et coefficient de frottement

$$C_O = 0,360 \times 10^{-6} \text{ mole / cm}^3 \quad T = 21^\circ \text{ C} \quad \nu = 1,02 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$$

I μA	0,86	1,07	1,17	1,30	1,43	1,56	1,79	1,99
$K_{1/2} \times 10^3$ cm/s	3,33	4,13	4,52	5,03	5,53	6,03	6,92	7,70
s s^{-1}	128,8	269	355	490	663	874	1364	1864
10^2 Nt/s	0,418	0,675	0,825	1,00	1,20	1,425	1,80	2,25
$\sqrt{T_s}$	813	1313	1605	1945	2334	2772	3501	4376
$F^* \times 10^3$	6,31	5,07	4,48	4,20	3,95	3,69	3,61	3,16

I μA	2,23	2,44	2,58	2,28	3,17	3,47	3,75
$K_{1/2} \times 10^3 \text{ cm/s}$	8,63	9,44	9,98	1,152	12,25	13,41	14,5
s s^{-1}	2661	3507	4200	6440	7780	10280	13600
10^2 N t/s	2,93	3,47	3,95	4,90	6,025	7,00	8,00
$\sqrt{T_s}$	5699	6749	7683	9530	12750	13610	15560
$F^* \times 10^3$	2,65	2,50	2,31	2,30	1,84	1,80	1,74

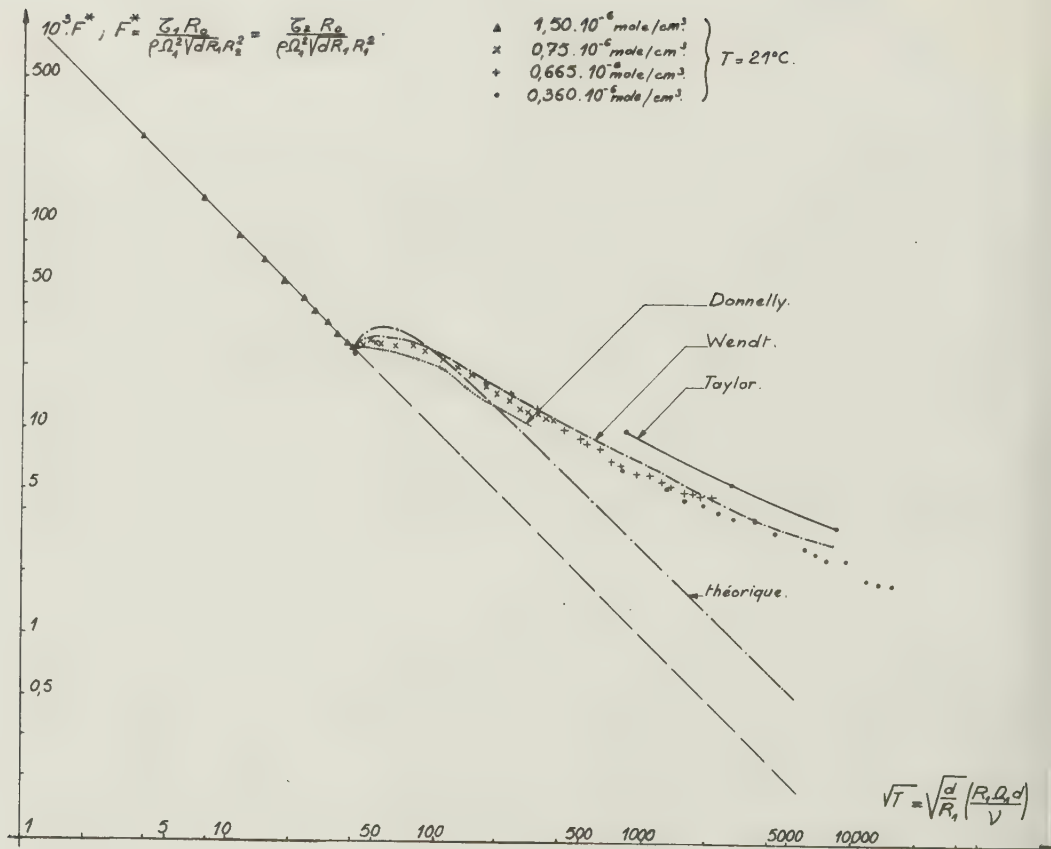


Fig. 5-7 Coefficient de frottement

montre bien, lorsque $d \ll R_1$, que V est pratiquement constant. La couche limite serait due au mouvement circonférentiel et non au mouvement dans les cellules. En fait, il doit y avoir une continuité d'un modèle d'écoulement à l'autre.

Sur la figure 5-7, nous avons enfin tracé la courbe du frottement d'après la théorie non linéaire (courbe théorique). On constate qu'elle suit à peu près les courbes expérimentales jusqu'à $T = 200$, soit $T \simeq 2 T_c$. Les écarts constatés ensuite peuvent être dus au développement de la seconde instabilité.

V.4.3. Amplitude de la perturbation axiale

Le transfert de matière enregistré au niveau de l'électrode pour le mouvement correspondant aux cellules de TAYLOR est donné par (II,28) :

$$K = 0,807 \left(\frac{D^2 S}{d_0} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{\beta d_0}{S} \right) \quad \text{avec}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \beta = \beta_1 \cos \lambda z \\ S = \sqrt{(S_V + s_{V1} \cos \lambda z)^2 + s_{w1}^2 \sin^2 \lambda z} \end{cases}$$

L'écart entre les valeurs maximales S_M et minimales S_m de S , obtenues pour $\lambda z = k\pi$ est égal à $2s_{V1}$.

1- Pour T suffisamment voisin de T_c , $\beta d_0/S$ est négligeable devant 1 ; les valeurs de K_M et K_m correspondant au maximum et au minimum de transfert enregistré pour une vitesse donnée permettent de déterminer s_{V1} et par conséquent l'amplitude de la perturbation axiale.

2- Lorsque T atteint $1,10 T_c$, $\beta d_0/S \simeq 1/30$ selon la théorie non linéaire (qui donne au moins un ordre de grandeur du résultat), il faut retirer 3 % à K_M et K_m pour obtenir les valeurs correctes de S_M et S_m , et ainsi de s_{V1} .

3- La théorie non linéaire semble moins bien convenir pour les vitesses supérieures puisqu'en considérant les mesures de transfert (courbe 5-6), il apparaît que l'amplitude de la perturbation poursuit

sa croissance au moins jusqu'à $10 \Omega_c$ ($100 T_c$) ce qui est peu compatible avec les prévisions de décroissance de β à partir de $1,1 T_c$.

Il est probable que la composante normale continue d'augmenter, cependant il n'est guère possible de préciser la loi de cette croissance. Le problème serait sans doute plus simple avec une électrode de très petite dimension ($d_0 = 10^{-2}$ cm) permettant de négliger $k_2 d_0$ dans tous les cas.

La comparaison des résultats ne pouvant avoir lieu que pour les valeurs de T proches de T_c , nous avons reproduit avec soin sur les figures 5-8 a et b la partie des courbes moyennes de K_M et K_m correspondant à ce domaine de vitesse.

La figure 5-9 représente les variations de s_{v1}/Ω_1 en fonction de $(1 - T_c/T)^{1/2}$; les croix correspondent aux valeurs expérimentales sans correction, les cercles représentant les valeurs pour lesquelles le transfert a été corrigé (quand cela était possible) de l'influence de la composante normale. On constate que cette correction rapproche les résultats de la droite théorique prévue par STUART. La courbe expérimentale se sépare de cette droite pour $T \simeq 1,3 T_c$, soit $\Omega_1 < 1,14 < \Omega_c$. Le domaine de validité de la théorie est donc fort limité et rapidement l'amplitude de la perturbation axiale croît plus vite que prévu. On peut cependant penser que notre méthode de détermination de l'amplitude n'est pas entièrement rigoureuse car en étant basée sur la mesure crête à crête du courant, elle suppose l'existence uniquement de la période fondamentale, or nous avons signalé que lorsque la vitesse était augmentée à partir de Ω_c , on constate une déformation progressive de l'oscillation qui peut être due soit au retard inhérent à la méthode, soit à la naissance d'harmoniques; d'autre part, le fait que le transfert de matière soit une fonction en puissance $1/3$ du gradient multiplie sensiblement par 3 les erreurs. L'incertitude sur l'amplitude est ainsi de l'ordre de 6 %.

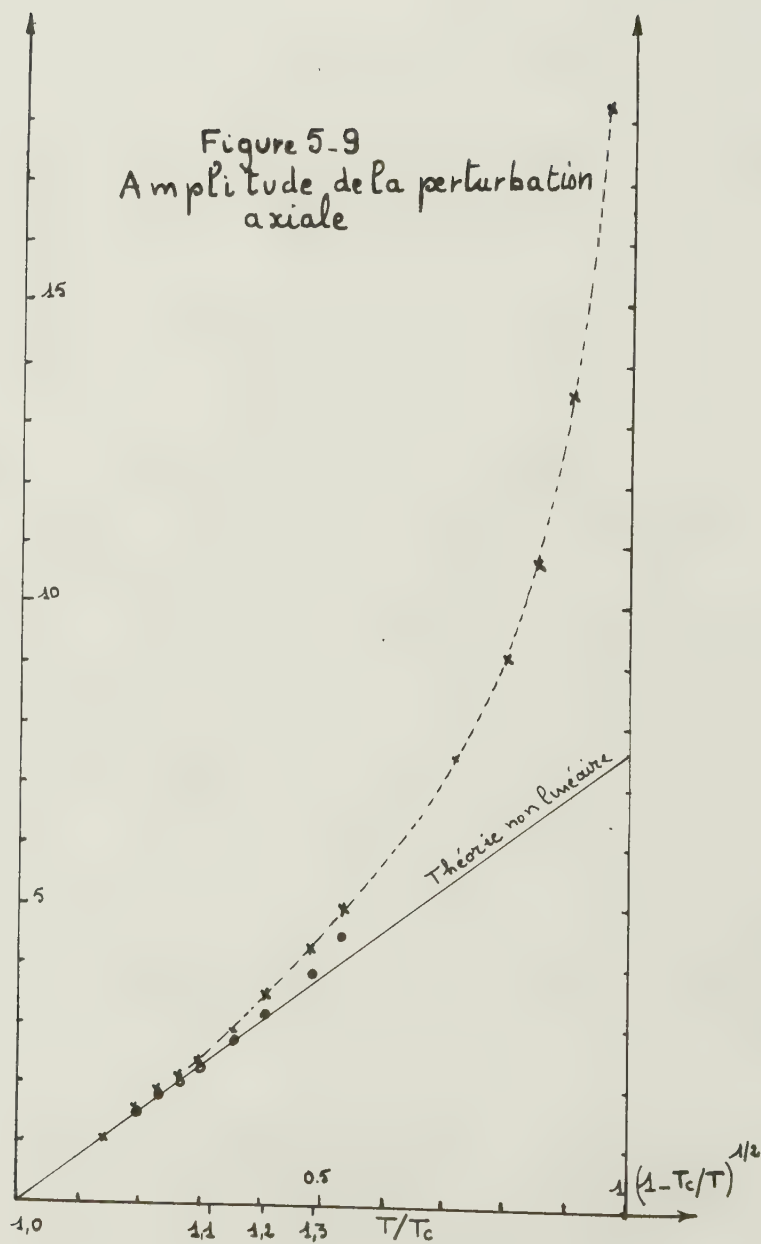
V.5 Multiplicité des états de l'écoulement

COLES a, le premier, montré que l'écoulement de COUETTE en régime transitoire présentait des caractères de "non unicité". Le mouvement n'est en effet pas déterminé uniquement par la vitesse de



Fig. 5-8 a,b
Coefficient de transfert
au voisinage de T_c

Figure 5-9
Amplitude de la perturbation
axiale



rotation du cylindre intérieur, mais également par son "histoire antérieure". Ainsi selon la manière dont on établit la vitesse, on peut obtenir plusieurs états. La détermination des maximums et des minimums de transfert nous a tout naturellement conduits à mesurer la largeur des cellules et en déduire leur nombre ; la fréquence des oscillations enregistrées permettant quant à elle de connaître la fréquence des ondes circonférentielles. Etant donné la durée des mesures de transfert et, de ce fait, la difficulté d'avoir de nombreux résultats, nous avons complété notre étude par des expériences de visualisation telles qu'elles ont été présentées par les photographies 5-2 a - f. Les états observés sont définis par deux nombres entiers qui représentent le nombre des cellules et le nombre des ondes n . La transition d'un état à un autre se fait par le changement de l'un ou l'autre, ou des deux nombres. L'enregistrement du courant permet de se rendre compte dans une certaine mesure de ce qui se passe :

Lorsqu'il y a un changement uniquement du nombre d'ondes circonférentielles, il peut s'effectuer de deux manières différentes, la modification s'annonçant dans les deux cas par une certaine dissymétrie dans l'enregistrement, donc dans le mouvement ; par exemple une oscillation se singularise dans la période en accroissant son amplitude, puis se subdivise en plusieurs oscillations qui s'harmonisent ensuite au dépend de l'ensemble de la période, qui redevient peu à peu complètement symétrique. On peut également observer le rapprochement progressif de deux ondes qui arrivent à se fondre l'une dans l'autre pour n'en faire qu'une.

Le changement du nombre de cellules peut aussi s'effectuer brusquement ou lentement ; dans certains cas, il apparaît deux nouvelles cellules en haut ou en bas de l'espace annulaire ; les changements sont alors brusques et précédés par une forte oscillation assymétrique (fig 5-5 a). Dans d'autres cas, les cellules peuvent, soit diminuer, soit accroître légèrement leur largeur pour en laisser une se former à l'extrémité inférieure ouverte de l'espace annulaire. De telles transitions sont lentes et ne modifient le nombre total de cellules que de une unité. Elles n'ont pas été observées par COLES, son appareil étant fermé aux deux extrémités.

Tous les états obtenus sont inscrits par des points, les croix utilisées dans 5-10 a, b, c et d représentent des états observés mais instables au bout de quelques minutes. Les limites en traits pleins ou pointillés joignent les points extrêmes ; les "trous" inclus dans ces limites correspondent à des états qui n'ont pas été obtenus, mais qui doivent exister par simple raison de continuité.

Les figures 5-10 a,b,c représentent le nombre d'onde axial $\lambda = 2 \pi / 2b$ (b étant la largeur moyenne des cellules) en fonction du nombre de Reynolds. Pour $Re = Re_c$, λ est égal à $\pi / d = \pi \text{ cm}^{-1}$ (14 cellules) ; ensuite à part une légère exception (existence possible de 15 cellules) λ ne fait que décroître lorsque Re croît. Aux très grandes vitesses, il subsiste une périodicité résiduelle de 5 ou 6 cellules, bien que la turbulence soit complètement établie.

Les variations du nombre d'ondes circonférentielles n sont reproduites sur les figures 5-10 d, e. n croît de 1 (en fait il s'agit de la forme hélicoïdale de la première instabilité) à 3 ou 4 pour Re'_c . Pour $Re = 200$, n est compris entre 6 et 13. A partir de $Re \simeq 800$, n commence à décroître jusqu'à $Re \simeq 1\ 800$, où les ondes disparaissent pratiquement. Il en subsiste parfois jusqu'à $Re \simeq 2\ 500$, mais elles sont difficiles à discerner dans la turbulence naissante.

Le domaine de stabilité des ondes est donc beaucoup moins étendu que celui des cellules, leur disparition étant liée à l'apparition des fluctuations turbulentes.

Au cours de certaines expériences effectuées pour des valeurs décroissantes de Re, nous avons constaté (après une décélération rapide par exemple) que les ondes peuvent également disparaître pour des vitesses Ω_c'' peu reproductibles, nettement supérieures à celle obtenue (Ω_c') pour des valeurs croissantes de Re ($\Omega_c'' \simeq 1,3$ à $1,4 \Omega_c'$). La perturbation correspond alors aux classiques cellules de TAYLOR; c'est la seule manière que nous avons eue de les obtenir.

L'explication du grand nombre d'états possibles est encore à trouver. Ils correspondent sans doute à des niveaux d'énergie et de dissipation visqueuse très voisins (différence de quelques %) et il faudrait une précision meilleure que celle de nos mesures pour mettre en évidence une loi de transition d'un état à un autre. COLLES pense qu'il

$\lambda = \frac{3\pi}{2b}$
Multiplicité des états : Nombre d'onde axial

Figure 5-10a

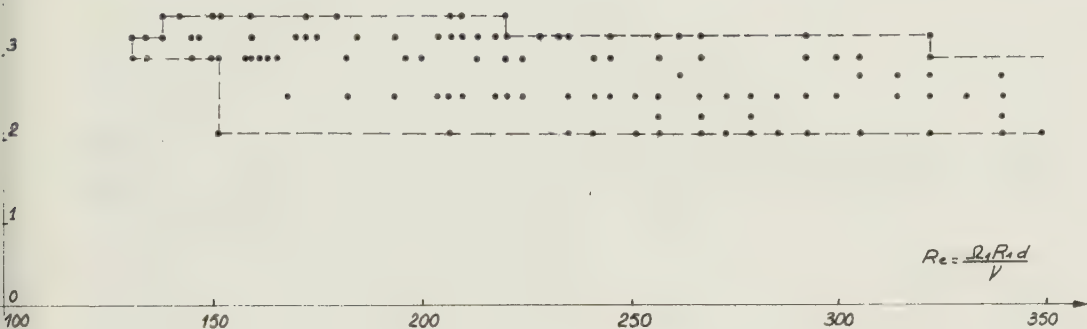


Figure 5-10 b

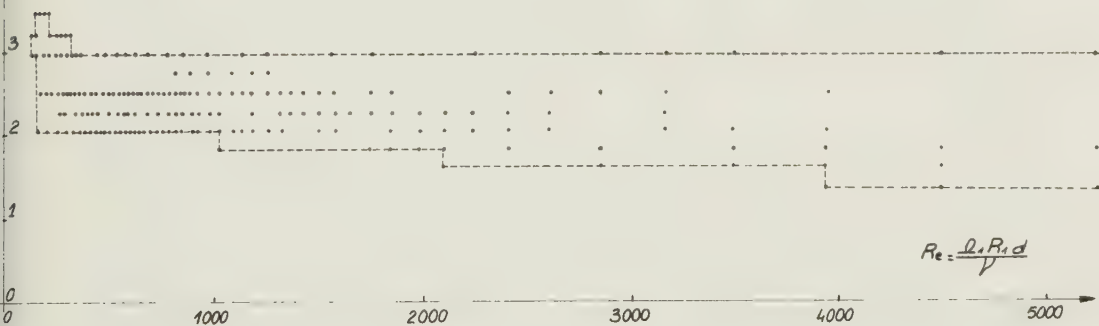
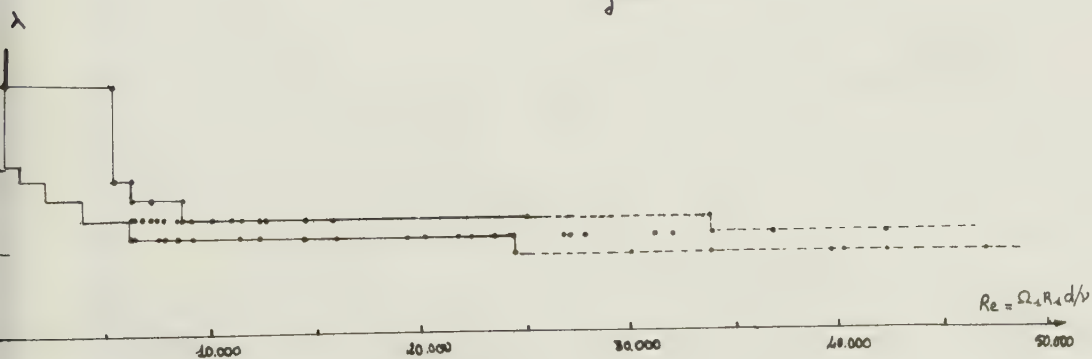


Figure 5-10c



Nombre d'ondes circonférentielles. Figure 5-10 d

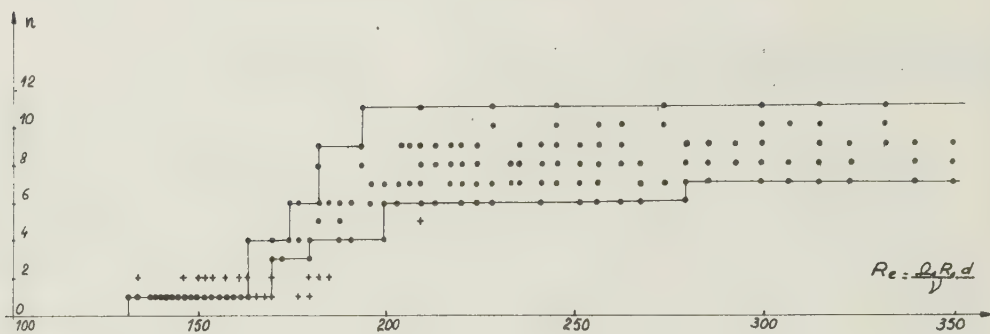


Figure 5-10 e

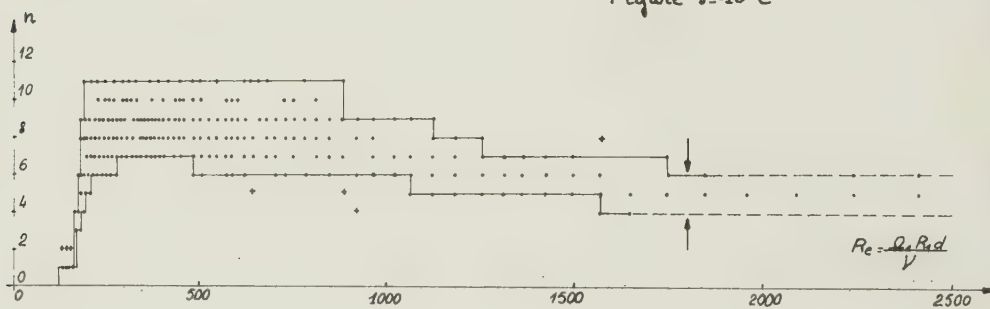
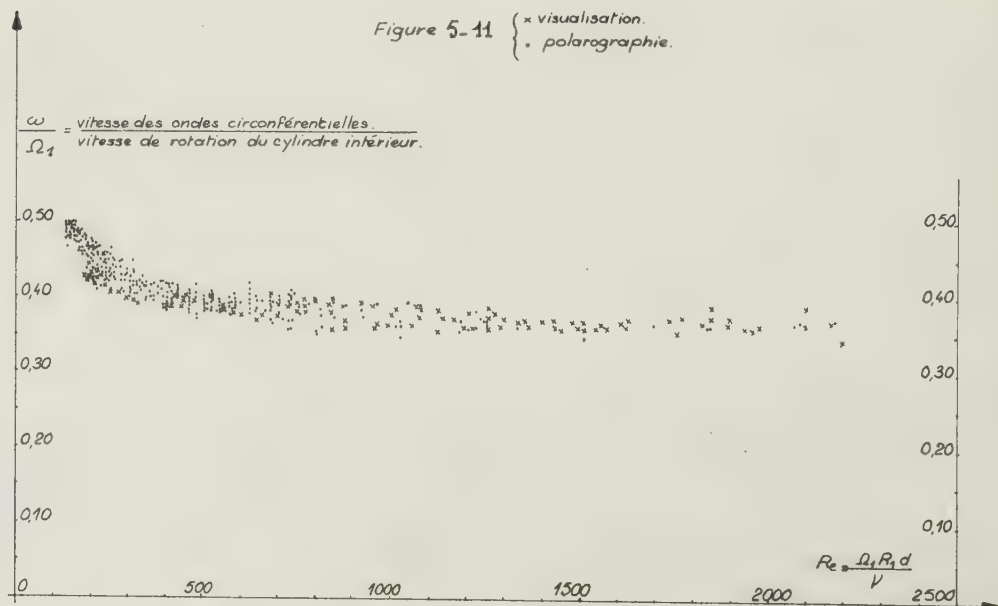


Figure 5-11 { × visualisation.
• polarographie.



serait possible dans certains cas (cylindres très longs) d'appliquer des méthodes statistiques pour résoudre ce problème.

Il existe cependant une caractéristique commune à tous les états, il s'agit de la vitesse ω des ondes circonférentielles par rapport à la vitesse de rotation du cylindre. ω/Ω_1 est représenté sur la figure 5-11 ; malgré la grande diversité des états, la dispersion des valeurs est relativement faible, le rapport voisin de 0,5 à l'apparition de l'instabilité décroît d'abord rapidement jusqu'à $Re = 300$, puis ensuite lentement et atteint 0,35 pour $Re = 2\ 000$.

Il est possible qu'une étude partant de cette propriété conduise à une meilleure connaissance de l'ensemble du problème que constitue le régime transitoire d'écoulement.

-ooOoo-

CONCLUSION

Nous avons mis au point et utilisé pour l'étude du mouvement de CUETTE, la méthode polarographique fondée sur la mesure du flux de matière au niveau d'une microélectrode située en frontière de l'écoulement.

Pour mener à bien ce travail, partant du principe de la méthode, et particulièrement des conditions aux limites imposées par le phénomène, nous avons fait une étude théorique pour relier le flux de matière à l'électrode au champ des vitesses dans quelques cas d'écoulement simple mais d'intérêt fondamental.

Le calcul nous a permis de montrer que pour un écoulement tangentiel, du fait de la faible épaisseur du domaine de diffusion le transfert au niveau d'une électrode rectangulaire est pratiquement proportionnel à la puissance $1/3$ du gradient pariétal de vitesse, dès que celui-ci est supérieur à 1 s^{-1} et pour une électrode circulaire la puissance est légèrement inférieure, mais le comportement est semblable. Si l'écoulement possède en plus une composante normale, fonction parabolique de la distance à la paroi, celle-ci a d'autant moins d'importance que l'électrode est de faible dimension ; la loi de transfert est semblable à celle obtenue dans le premier cas avec un terme correctif qui est très voisin de l'unité, lorsque la composante normale est faible devant la composante tangentielle. La première loi est donc essentielle.

Les mesures effectuées en écoulement subcritique ont permis de vérifier ces résultats et de préciser le temps de réponse de la méthode qui, bien qu'étant relativement important, reste suffisamment faible pour l'étude du régime transitoire.

En régime supercritique, la méthode s'est révélée très riche en nous permettant d'obtenir de nombreux résultats.

Tout d'abord, nous avons pu identifier les différents types d'instabilité de l'écoulement et localiser les vitesses auxquelles ils apparaissent.

Si la première instabilité est légèrement différente de celle qui est attendue (mouvement hélicoïdal au lieu des cellules toriques), l'instabilité doublement périodique (selon θ et oz) est conforme à celle observée par SCHULTZ-GRUNOW, DONNELLY et SCHWARZ, et COLES. A notre connaissance, il semble que ce soit la première fois qu'une méthode autre qu'optique permet de détecter les ondes circonférentielles.

Le mouvement est alors complexe, car l'interaction des deux périodicités provoque un déphasage entre les ondulations des limites respectives de chaque cellule ($\pm \pi/2$ environ).

A partir d'une certaine vitesse de rotation, l'instabilité selon θ disparaît pratiquement et les cellules redeviennent parallèles et subsistent, malgré le complet développement de la turbulence, aux grandes vitesses.

Les mesures de transfert moyen nous ont permis de calculer le frottement auquel est soumis le cylindre extérieur de la part du liquide. La comparaison avec les mesures de couple justifie amplement la méthode.

L'aspect tridimensionnel du mouvement est plus délicat à aborder avec des électrodes circulaires sensibles à n'importe quelle direction tangentielle de l'écoulement. Cependant d'après les ordres de grandeur des composantes de vitesse obtenues à partir de la théorie non linéaire, il a été possible de déterminer l'amplitude de la perturbation axiale dans les premiers stades de son développement. Les résultats montrent que la théorie linéaire a un domaine de validité réduit :

$$\Omega_c < \Omega_1 < 1,14 \Omega_c.$$

Le régime supercritique a enfin été abordé sous l'aspect de la "non unicité du mouvement".

Le problème des transitions d'un état à l'autre tient sans doute au niveau d'énergie de chaque état et à la dissipation

visqueuse qui s'y produit. A partir des mesures que nous avons effectuées, il n'est cependant pas possible de faire des distinctions entre les états. On peut seulement constater que leur nombre part de 1 pour $\Omega_1 < \Omega_c$, augmente rapidement, passe par un maximum (assez plat) puis décroît à 1 ou 2 pour les grandes vitesses d'écoulement. Une recherche plus systématique serait sans doute nécessaire pour éclairer le problème.

Cette étude montre les possibilités importantes qu'apportent la méthode polarographique telle que nous l'avons utilisée. Le choix d'électrodes plus fines et de forme plus sélective vis-à-vis des vitesses que l'on désire mesurer, devrait permettre de poursuivre le travail qui a été amorcé, mais aussi d'envisager un plan général d'investigation des écoulements liquides selon cette technique.

-oo0oo-

NOTATIONS

- a - amplitude de la perturbation axiale (adimensionnelle)
- a_e - amplitude d'équilibre
- a_n - amplitude de la perturbation azimutale d'ordre n
- d - espace annulaire (cm)
- d_0 - diamètre de l'électrode (cm)
- i - courant traversant la cellule (A)
- k - premier chapitre : coefficient d'amplification (s^{-1})
- k - chapitres suivants : composante fluctuante du coefficient de transfert de matière (cm/s)
- m - Ω_2 / Ω_1 rapport des vitesses angulaires
- n - nombre d'ondes circonférentielles (chapitre V)
- p - fluctuation de pression (dyne / cm^2)
- r - distance à l'axe (cm)
- r_0 - rayon de l'électrode (cm)
- s - fluctuation du gradient pariétal de vitesse (s^{-1})
- s_{v_1} - fluctuation du gradient correspondant à v_1 (s^{-1})
- s_{w_1} - fluctuation du gradient correspondant à w_1 (s^{-1})
- t - temps (s)
- u, v, w - composantes radiale, azimutale et verticale de vitesse de la perturbation (cm/s)
- u_1, v_1, w_1 - amplitude de u, v, w fonctions de r (cm/s)
- x, y, z - coordonnées cartésiennes

- A - aire de l'électrode (cm^2)
- C(x, y, z) - concentration au point x, y, z (mol/cm^3)
- C_0 - concentration au sein du fluide (mol/cm^3)
- D - coefficient de diffusion (cm^2/s)
- E_{eq} - potentiel d'équilibre du système rédox (V)
- E_0 - potentiel normal
- E_A et E_C - potentiels de l'anode et de la cathode (V)
- $E_{1/2}$ - potentiel de $\frac{1}{2}$ vague (V)
- F - nombre de FARADAY (96 500 C)
- F* - coefficient de frottement (adimensionnel)
- G - gradient normal de concentration (adimensionnel)
- H - hauteur de la plaque où a lieu la convection naturelle (cm)
- I - courant limite de réduction (A)
- K - coefficient de transfert de matière (cm/s)
- K_M, K_1, K_m - valeurs maximale, médiane et minimale de K en régime transitoire (cm/s)
- K_0 - coefficient de transfert lorsque le liquide est immobile
- L - largeur de l'électrode rectangulaire (cm)
- P(x, y, z) - pression (dyne/ cm^2)
- R - constante des gaz parfaits (8,32 J/d°)
- R_1 et R_2 - rayons des cylindres intérieur et extérieur (cm)
- R_0 - rayon moyen (cm)
- S - gradient normal de vitesse (s^{-1})

- S_1 et S_2 - gradients pariétaux de vitesse au niveau des cylindres intérieur et extérieur (s^{-1})
 S_V - gradient moyen selon V en régime transitoire (s^{-1})
 T - température ($^{\circ}K$)
 U, V, W - composantes radiale, azimutale et verticale de la vitesse (cm/s)
 $\bar{V}$ - vitesse moyenne par rapport à z (cm/s)
 $\vec{V}$ - vecteur vitesse du mouvement (cm/s)

- P_T - nombre de Taylor :
$$\frac{\pi^4 \nu^2 (R_1 + R_2)}{2 \Omega_1^2 d^3 R_1^2 (1 - m R_2^2 / R_1^2) \cdot (1 - m)}$$

 T_C - nombre de Taylor d'après Chandrasekhar :
 pour $m = 0$
$$\frac{4 R_1^2 d^4}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2$$

- T_M - nombre de Taylor d'après Meksyn :

$$\frac{2 \Omega_1^2 d^3 R_1^2 (1 - m R_2^2 / R_1^2) [(1 + m) - 3d / 4 R_0 \cdot (1 - m)]}{\nu^2 (R_1 + R_2)}$$

- T_S - nombre de Taylor d'après Stuart : $R_1 d^3 (\Omega_1 / \nu)^2$
 Re - nombre de Reynolds $R_1 \Omega_1 d / \nu$
 P - gradient pariétal de vitesse adimensionnel : SL^2 / D
 Sh - nombre de Sherwood, flux de matière adimensionnel : $K d_0 / D$
 Sc - nombre de Schmidt : ν / D

- β - coefficient de y^2 dans la composante normale de vitesse ($cm^{-1}s^{-1}$)
 β_1 - coefficient de y^2 dans u_1 (théorie linéaire)
 δ - épaisseur de la couche limite fictive de concentration (cm)
 Φ - flux de matière (mole/s)
 Φ_0 - flux de matière lorsque le liquide est immobile (mole/s)
 λ - nombre d'onde axial (cm^{-1})
 λ^* - nombre d'onde adimensionnel : λd
 λ_{ax} - longueur d'onde axiale (cm)
 μ - viscosité dynamique (Poise)
 ν - viscosité cinématique (cm^2/s)
 ω - vitesse angulaire des ondes circonférentielles (rd/s)
 ω_n - pulsation des ondes circonférentielles d'ordre n
 Ω_1 et Ω_2 - vitesses angulaires des cylindres intérieur et extérieur (rd/s)
 Ω_c et Ω'_c - valeurs critiques de Ω_1 pour la 1^{ère} et la 2^{de} instabilité
 ρ - masse volumique (g/cm^3)
 $\frac{\rho}{\rho_0} = (r - R_0) / d$
 ξ', η', γ' - composantes du rotationnel de la perturbation
 τ - coefficient de frottement ($cm^{-1} \cdot s^{-2}$)
 τ_1 et τ_2 - coefficients de frottement sur les cylindres intérieur et extérieur
 $\bar{t}$ - constante de temps (s)

Remarque : certaines notations utilisées dans les calculs intermédiaires et définies dans le texte ne sont pas reportées ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1] JEFFREYS H. - Proc. Roy Soc A 118, p 195 - 208 (1928)
2] BATCHELOR, G.K. - Quart. J. Roy Meteor Soc. 80, p 339 - 359 (1954)
3] OSTRACH, S - N.A.C.A. Techn. Note 3141 (1954)
4] " - Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 79, p 299 - 307 (1957)
5] TAYLOR, G.I. - Phil. Trans. A 223, p 289 - 343 (1928)
6] COLES, D. - Journal Of Fluid Mechanics 21, p 385 - 425 (Mars 1965)
7] LIN, C. - The Theory of Hydrodynamic Stability Cambridge University Press (1955)
8] GOERTLER, H. - Nachr. Ges. Wiss. Göttingen N.F. 2 (1) p 1 - 26 (1940)
9] PELLEW, A et SOUTHWELL, R.V. - Proc. Roy. Soc A 176, p 312 - 343 (1940)
0] STUART, J.T. - J. Aero. Sci. 23, p 86 - 88 et p 894 (1956 a)
1] " - Z. Angew. Math. Mech., Sonderheft (1956) p 932 (1956 b)
2] " - J. Fluid Mech. 4, p 1 - 21 (1958)
3] MEKSYN et STUART - Proc. Roy. Soc. A. 208, p 517 - 526 (1951)
4] LANDAU, L. - C.R. (Doklady) Acad. Sci. U.R.S.S. p 311 (1944)
5] LANDAU et LIFSMITZ - Fluid Mechanics (Pergamon Press. London) § 27 (1959)
6] COUETTE, M. - Ann. Chim. Phys. (6) 21, p 433 - 510 (1890)
7] MALLOCK, A. - Proc. Roy Soc. A 45, p 126 - 132 (1888)
8] " - Phil. Trans. A 187, p 41 - 56 (1896)
9] LORD RAYLEIGH - Proc. Roy. Soc. A 93 p 148 - 154. (1916)
0] MEKSYN, D - Proc. Roy. Soc. A 187, I p 115 - 128 (1946)
1] " - Proc. Roy. Soc. A 187, II p 480 - 491 (1946)
2] CHANDRASEKHAR - Proc. Roy. Soc. A 216, p 293 - 309 (1953)
3] " - Mathematika 1, p 5 - 13 (1954)
4] " - Proc. Roy. Soc. A. 246, p 301 - 311 (1958)
5] GOLDSTEIN, S. - Proc. Camb. Phil. Soc. 53, p 41 - 61 (1937)
6] DI PRIMA, R.C. - J. Fluid Mech. 9, p 621 - 631 (1960)
7] DAVEY, A - J. Fluid Mech 14, p 336 - 368 (1962)
8] WENDT - Ing. Arch. 4, p 577 - 595 (1933)
9] TAYLOR - Proc. Roy. Soc. A 157, I et II p 246 - 578 (1936)
0] DONNELLY, R.J. - Proc. Roy. Soc. A 246 p 312 (1958)
1] " - Proc. Roy. Soc. A 283 p 509 (1965)
2] " , REIF et SUHL - Phys. Rev. Lett 9, p 363 (1962)
3] " et SCHWARTZ - Phys. Letters 5, p 322 - 324 (1963)

- [34] DONNELLY et TANNER - Proc. Roy. Soc. A 283, p 520 - 530 (1965)
- [35] " SCHWARZ - Proc. Roy. Soc. A 283, p 531 - 549 (1965)
- [36] SNYDER et LAMBERT - J. Fluid Mech. 26, p 545 - 561 (1966)
- [37] NIILER, P. - The Review of Scientific Instruments 36, n°7 p 921-924 (1965)
- [38] LAMBERT, SNYDER et KARLSSON - The review of Scientific Instruments 36, n° 7, p 924 - 928 (1965)
- [39] COLES et VON ATTA - J. Fluid. Mech. 21, p 385 - 423 (1965)
- [40] SCHULTZ - GRUNOW et HEIN - Z Flugwiss 4, p 28 - 30 (1956)
- [41] DONNELLY et FULTZ - Proc. Roy. Soc. A 258, p 101 - 123 (1960)
- [42] DI PRIMA - The physics of fluids 4, p 751 - 755 (1961)
- [43] ROBERTS - Proc. Roy. Soc. A 283, Appendix p 550 - 556 (1965)
- [44] DAVEY, DI PRIMA et STUART - J. Fluid Mech. 31, p 17 - 64 (1968)
- [45] MEYERNICK et FRIEDLANDER - Report of National Sciences Fondation Grant n° G 5078 (mai 1960)
- [46] LIN, DENTON, GASKILL et PUTNAM - Ind. Eng. Chem. 43, p 2136 (1951)
- [47] EISENBERG, TOBIAS et WILKE - J. Electrochem Soc. 99, p 359 C (1952)
- [48] " " " - J. Electrochem. Soc. 100, p 513 (1953)
- [49] " " " - J. Electrochem. Soc. 103, p 413, 416 (1956)
- [50] REISS et HANRATTY - A.I.Ch. E. 8, p 245 (1962)
- [51] " " - A.I.Ch. E. 9, p 154 (1963)
- [52] CHARLOT - Les réactions électrochimiques. Masson et Cie (1959)
- [53] CARLSLAW et JAEGER - Conduction of Heat in Solids Oxford Univ. Press p 214
- [54] EUCKEN - Z Elektrochem. 38, p 341 - 345 (1932)
- [55] SNEDDON - Fourier Transforms Mac Grawhill, p 271 (1951)
- [56] LING - J. Heat. Trans, C, 85, p 230 (1962)
- [57] NOEL, P. - Thèse de Doctorat ès-Sciences Mathématiques Université de Nancy (Février 1967)
- [58] ABRAMOWITZ - Tables (1950)
- [59] LEBOUCHE, M. - Thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques Université de Nancy, à paraître (1968)
- [60] REISS, L.P. - Ph. D; Thësis University of Illinois Urbana . Illinois (1962)
- [61] LAITINEN et KOLTOFF - J. Am Chem. S. 61, p 3344 - 3349 (1939).
- [62] LEVITCH - Physico-Chemical Hydrodynamics (Prentice hall 1962)
- [63] SCHLICHTING - Boundary-Layer Theory Mac Graw-Hill

- [64] LUCIUS M. - Thèse 3ième cycle Sciences Mathématiques Université de Nancy (1967)
- [65] SNYDER et KARLSSON - The Physics of Fluids 7 n° 10, p1696-1706 (1964)
- [66] KRUEGER, GROSS et DI PRIMA - J. Fluid Mech. 24 p 521-38 (1966)
- [67] RICHTIE - J. Fluid Mech. 32, p 131-144 (1968)
- [68] FRAENKEL - Proc. Roy. Soc. A 233 p 506 - 26 (1956)
- [69] DONNELLY et SIMON - BATCHELOR (Appendice) J. Fluid Mech. 7 p 401-18 (1959)
- [70] TAYLOR G.I. - Proc. Roy. Soc. A 151 p 494 (1935)

ANNEXE I

Résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues par une méthode de type Richardson dans le cas où la matrice du système est définie positive

On doit résoudre de système linéaire

$$[A] [X] = [B] \quad (1)$$

où $[X]$ est le vecteur inconnu, $[B]$ un vecteur constant et $[A]$ la matrice du système.

Définissons 2 polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ liés par $P(0) = 1$ et $Q(x) = \frac{P(x) - 1}{x}$. Si $P(A)$ et $Q(A)$ sont les polynômes matriciels associés à $P(x)$ et $Q(x)$, on démontre que la suite vectorielle de terme général :

$$[X_k] = [P(A)] [X_k - 1] - [Q(A)] [B] \quad (2)$$

quand elle converge, converge vers la solution $[X]$ de (1). La convergence n'a lieu que si $h = \|P(A)\| < 1$.

Lorsque $[A]$ est définie positive : $h = \max_i |P(\lambda_i)|$, les λ_i étant les valeurs propres de $[A]$, et la condition devient :

$$\max_i |P(\lambda_i)| < 1 \quad (3)$$

La convergence de la suite est d'autant plus rapide que h est petit.

Il faut déterminer les limites du spectre de $[A]$, c'est-à-dire deux nombres α et β tels que $0 < \beta \leq \lambda_i < \dots < \alpha$. Le calcul de la plus grande valeur propre de $[A] - \alpha [I]$ fournit $\mu = \alpha - \beta$ d'où β . La suite (2) converge pour tout polynôme positif $P(x)$, tel que :

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(x) < 1 \text{ pour } x \in (\beta, \alpha) \end{cases}$$

On démontre que le polynôme permettant une optimisation de la convergence est obtenu à partir du polynôme de TCHEBYCHEFF et vaut pour un degré β :

$$P(x) = \frac{T_p\left(-\frac{2x}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)} \quad \text{avec } T_p(x) = \begin{cases} \cos p \cdot [\arccos(x)] & \text{si } x \leq 1 \\ \cosh p \cdot [\operatorname{Arg} \cosh(x)] & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

alors $h = \max_i |P(\lambda_i)| = \frac{1}{T_p\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}$

Dans notre cas la matrice $[A]$ obtenue par discrétisation n'a pas forcément toutes ses valeurs propres réelles et de même signe, l'opérateur :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - S_y \frac{\partial}{\partial x}$$

n'étant pas homogène.

On se ramène à une telle matrice en résolvant le système équivalent à (1).

$$[A^T][A][X] = [A^T][B] = [D]$$

$[A^T]$ étant la matrice $[A]$ transposée la matrice $[M] = [A^T][A]$ est alors définie positive. La résolution s'en trouve cependant compliquée car $[M]$ est moins creuse que $[A]$ (7 éléments non nuls par ligne au lieu de 5)

Appel de la Procédure de résolution et définition des paramètres.

<u>Appel</u>	Procédure RICHARDSON (ALPHA, BETA, MULMAVEC, X, D, N, P, EPS, TEST) ;
paramètres	ALPHA (réels) limitent le spectre de la matrice $[M]$
	BETA ils sont déterminés pour chaque vitesse d'écoulement.
P	<u>entier</u> degré initial du polynôme P (M)
N	<u>entier</u> nombres d'inconnues (nombre de points du réseau)
X	tableau $[1:N]$ à l'entrée : vecteur initial (X_0) à la sortie : vecteur solution
D	tableau $[1:N]$ vecteur second membre. N'est pas détruit par la procédure.
EPS	<u>Réel</u> précision finale entre les 2 derniers itérés
	$EPS = \max_j x_k^j - x_{k-1}^j $ x_k^j est la j-ième composante de $[X_k]$
	MULMAVEC <u>instruction procédure</u> - appelée sous forme
	MULMAVEC (X1, X2, N). Cette procédure calcule $[X_2] = [M][X_1]$ sans nécessiter la réservation en mémoire de $[M]$
TEST	<u>booléen</u> Si test a la valeur 'vrai', à chaque itérations sont imprimées le degré de

$$P(A) = \frac{\max_j |x_k^j - x_{k-1}^j|}{\max_j |x_{k-1}^j - x_{k-2}^j|}, \max_j |x_k^j - x_{k-1}^j|$$

Si test à la valeur 'Faux' le programme se déroule sans impression intermédiaire

- Remarques.
- 1) la condition $\alpha \leq \lambda_i$ est impérative pour que le procédé soit convergent. Cette valeur doit donc être calculée avec grande précision.
 - 2) La valeur de $[X]$ au départ, est au choix de l'utilisateur.
 - 3) L'expérience a montré que le degré ne peut pas être très élevé : $P \leq 8$ par exemple.

```
'PROCEDURE'      RICHARDSON (ALPHA, BETA, MULMAVEC, X, D, N, P, EPS, TEST);
                  'VALEUR' ALPHA, BETA, N ;
                  'BOOLEEN' TEST ;
                  'REEL' ALPHA, BETA, EPS ; 'ENTIER' P,N, ; 'TABLEAU' X,D ;
                  'PROCEDURE' MULMAVEC ;
'DEBUT'          'ENTIER' I, K, P1 ;
                  'REEL' R, E1, E2, E3, PI ;
                  'TABLEAU' X1, X2 . (1:N). ;
                  PI:= 3.14159265 ; E2:=105+10 ;
                  P1:= P ;
                  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' X1.(I).:=X(1). ;
INTER :          'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P1 'FAIRE'
                  'DEBUT'
                    R:=1/( (ALPHA+BETA)/2+(ALPHA-BETA)/2*COS((2*K-1)*
                                                                PI/2/P1));
                    MULMAVEC (X1, X2,N)
                    'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
                      X1.(1).:=X1.(I).-R*X2.(I).+R*D.(I). ;
                    'SI' K 'EGAL' P1 'ALORS'
                      'DEBUT' E1:=0 ;
                        'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
                          'DEBUT' E3:=ABS(X1.(1).-X.(I).) ;
                            'SI' E3 'SUP' E1 'ALORS' E2:=E3 ;
                              X.(I).:=X1.(I).
                            'FIN' ;
                          'FIN' ;
                        'FIN' BOUCLE en K ;
                      E3:=E1/E2 ; E2:=E1 ;
                    'SI' TEST 'ALORS' 'DEBUT' EXE(5,P1); EXF (18,8,E3,E1); IMPR;
                                                                'FIN';
                    'SI' E2 'EGAL' 0 'ALORS' 'ALLERA' TERMINE ;
                    'SI' E3 'SUG' 1 'ALORS'
                      'DEBUT' 'SI' P1 'EGAL' 1 'ALORS' 'DEBUT' EPS:=E2 ;
                        'ALLERA' TERMINE
                      'FIN' ;
                    'FIN' ;
                  'ALLERA' ITER ;
TERMINER :       'FIN' RESOLUTION PAR RICHARDSON ;
```

REMARQUE : Les ordres d'impression correspondent au langage ALGOL utilisé pour la CAE 510

ANNEXE II

Etablissement du mouvement entre deux cylindres coaxiaux (R_1, R_2)
lorsque la vitesse du cylindre intérieur passe brusquement de Ω_1 à Ω_1'

La vitesse circonférentielle $V(r, t)$ satisfait l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) = 0 \quad (1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 : V(r, 0) = V_1(r) = Ar + B/r \\ t > 0 : V(R_1, t) = V_1' = R_1 \Omega_1 \\ \quad V(R_2, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Désignons par $U(r, p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} V(r, t) dt$

la transformée de Laplace de la fonction $V(r, t)$ où p est un paramètre complexe. (1) devient :

$$p [V(r, p) - V(r, 0)] = \nu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} \right) \quad (3)$$

$U(r, p) = V(r, 0) = V_1(r)$ est une solution particulière de (3) puisque $V_1(r)$ est harmonique.

La solution générale de (3) est donc de la forme :

$U(r, p) = A J_1(\alpha r) + B Y_1(\alpha r) + V_1(r)$ avec $\alpha = \sqrt{-\frac{p}{\nu}}$
 et J_1 et Y_1 sont les fonctions de Bessel de 1^{ière} et 2^{ième} espèce d'ordre 1.

Les conditions aux limites entraînent :

$$A J_1(\alpha R_1) + B Y_1(\alpha R_1) + V_1(R_1) = V_1'(R_1)$$

$$A J_1(\alpha R_2) + B Y_1(\alpha R_2) + V_1(R_2) = 0$$

$$\text{soit : } A = \frac{(V_1' - V_1) Y_1(\alpha R_2)}{J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_1)}$$

$$B = \frac{(V_1' - V_1) J_1(\alpha R_2)}{J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_1)}$$

D'où la solution :

$$U(r, p) = (V_1' - V_1) \frac{J_1(\alpha r) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha r)}{J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_1)} + V_1(r) \quad (4)$$

La solution $V(r, t)$ est alors donnée par la transformée inverse :

$$V(r, t) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{h-i\xi}^{h+i\xi} e^{pt} \frac{U(r, p)}{p} dp \quad (\mathcal{R}(p) = h)$$

A $V_1(r)$ près, l'intégrale est semblable à celle discutée par LUCIUS [64] ; on a par conséquent :

$$V(r,t) = (V_1' - V_1) \left(\frac{R_1}{r} \cdot \frac{R_2^2 r^2}{R_2^2 - R_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \right) + V_1(r)$$

où les R_n sont les résidus correspondant aux pôles λ_n de $U(r,p) = \frac{N(r,p)}{D(r,p)}$

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ les racines de $J_1(\alpha R_1)Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2)Y_1(\alpha R_1) = 0$ (5) que l'on démontre être toutes réelles [64] .

Les pôles $p = \lambda_n$ de $U(r,p)$ sont racines de : $p + \frac{\alpha_n^2}{\sqrt{r}} = 0$, donc toutes réelles et négatives.

$$R_n = \operatorname{res}_{p=\lambda_n} e^{pt} \frac{N(r,p)}{D(r,p)} = \frac{e^{\lambda_n t} N(r, \lambda_n)}{\frac{d}{dp} [p D(r,p)]_{p=\lambda_n}} \quad (6)$$

Après une suite de calculs évidents, on obtient :

$$V(r,t) = (V_1' - V_1) \left[\frac{R_1}{r} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda_n^2} t} \cdot \left(\frac{J_1(\alpha_n r)Y_1(\alpha_n R_2) - J_1(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n (A_1 - A_2)} \right) \right] + V_1(r) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } A_1 &= R_1 \left[J_1(\alpha_n R_2)Y_2(\alpha_n R_1) - J_2(\alpha_n R_1)Y_1(\alpha_n R_2) \right] \\ A_2 &= R_2 \left[J_1(\alpha_n R_1)Y_2(\alpha_n R_2) - J_2(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n R_1) \right] \end{aligned}$$

J_2 et Y_2 étant les fonctions de Bessel de 1^{ière} et 2^{ième} espèce du 2^{ième} ordre.

Les racines α_n de (5) ont été obtenues par la méthode de Newton. Les premières sont présentées dans le tableau ci-dessous :

3,1426759	6,2837272	9,4251392	12,566642	15,708181
18,849737	21,991304	25,132877	28,274454	

Leur nombre est suffisant du fait de la rapide convergence de la série exponentielle dès que $t \geq 1$ s.

L'évolution du mouvement en fonction du temps est ainsi entièrement déterminée.

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction	1
Chapître I - Le régime transitoire dans l'écoulement de Couette. Analyse et discussion des travaux antérieurs.	4
I.1. Généralités sur l'apparition et le développement des instabilités	4
I.2. Stabilité de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux ; l'instabilité symétrique	9
I.2.1. Les premiers travaux	9
I.2.2. L'étude de Taylor et la théorie linéaire	10
I.2.2.1. Description de l'instabilité symétrique	
I.2.2.2. Résolution du problème linéaire	11
I.2.3. L'étude de Stuart et la théorie non linéaire	16
I.2.4. Vérifications expérimentales :	19
I.3. Instabilité du second type et mouvement ultérieur	21
I.4. Conclusion	22
Chapître II - Principe de la méthode de mesure, son application à l'étude des écoulements	23
II.1 Choix de la méthode	23
II.2 La Polarographie, un modèle simple de transfert de matière	
II.3 Application à l'étude des écoulements	24
II.3.1 Transfert de matière dans le cas d'un disque circulaire, le liquide étant immobile	28
II.3.2 Etude théorique de transfert dans le cas d'un profil linéaire de vitesse	31

II.3.2.1. Discrétisation et méthode de calcul	33
II.3.2.2. Résultats	35
II.3.3. Etude de transfert dans le cas d'une vitesse possédant une composante normale à la paroi	38
II.4. Conclusions	40
 Chapitre III - Dispositif expérimental. Mise en oeuvre de la méthode polarographique.	43
III.1. L'écoulement	43
III.1.1. Géométrie du montage	43
III.1.2. Transmission du mouvement rotatif	44
III.2. Mise en oeuvre de la méthode polarographique	45
III.2.1. La cellule	45
III.2.1.1. Les électrodes	45
III.2.1.2. Le liquide polarographique	47
III.3. Tracé des polarogrammes et obtention des courants limites	51
III.4. Visualisation de l'écoulement	53
 Chapitre IV - Etude de l'écoulement de Couette en régime laminaire subcritique	55
IV.1. Etude expérimentale en écoulement laminaire établi	55
IV.1.1. Loi de transfert en fonction du gradient pariétal de vitesse	56
IV.1.2. Equivalence entre une électrode circulaire et une électrode rectangulaire. Influence du diamètre.	57
IV.1.3. Influence du coefficient de diffusion	59
IV.1.4. Discussion	59
IV.2. Transfert de matière en liquide immobile ou à de très faibles vitesses d'écoulement	60

IV.3.	Transfert de matière en régime de vitesse variable	65
IV.3.1.	Etude théorique ; temps de réponse	65
IV.3.2.	Etude expérimentale	67
IV.3.2.1.	Régime hydrodynamique transitoire dû à la variation brusque de la vitesse de rotation du cylindre intérieur	67
IV.3.2.2.	Expériences et résultats	69
Chapitre V - Etude de l'écoulement de COUETTE en régime supercritique		71
V.I.	Apparition du premier type d'instabilité	72
V.1.1.	Détermination de la vitesse critique Résultats expérimentaux	72
V.1.2.	Forme de l'instabilité	73
V.1.3.	Interprétation de la forme des oscillations enregistrées	76
V.2.	Second type d'instabilité. Développement ultérieur du mouvement	77
V.2.1.	Seconde vitesse critique	77
V.2.2.	Interprétation des enregistrements	78
V.2.3.	Mouvement ultérieur	79
V.3.	Résultats des mesures de transfert en fonction de la vitesse de l'écoulement	81
V.4.	Détermination de la valeur moyenne et de l'amplitude de la perturbation et comparaison avec les résultats de la théorie non linéaire de STUART	83
V.4.1.	Théorie non linéaire de STUART et son utilisation dans le cadre de notre méthode de mesure	83
V.4.2.	Mesures de gradient pariétal. Coefficient de frottement moyen	87
V.4.3.	Amplitude de la perturbation axiale	89

V.5. Multiplicité des états de l'écoulement	90
Conclusion	94
Notations	97
Références bibliographiques	99
Annexe I	102
Annexe II	105

Nom de l'Etudiant : COGNET Gérard

Nature de la THESE : Doctorat ès Sciences Physiques

Vu, Approuvé
et permis d'imprimer
NANCY, le
Le Doyen

J. AUBRY

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté :

RECENTES DECOUVERTES EN ASTROPHYSIQUE

A L'AIDE DES RAYONS INFRA-ROUGES

Cet exemplaire est imprimé
à des fins particulières et
ne peut en aucun cas être
vendu.

Achevé d'imprimer le 31 août 1968
au Service de Documentation du
Laboratoire de Mécanique de
l'E. N. S. E. M.
Rue de la Citadelle NANCY

Dépot légal n° 1 - Faculté des Sciences, Editeur
3ième trimestre 1968

